

# 在 Jaynes-Cummings 模型中压缩真空初态场 位相演化特性\*

吴美钧

彭金生\*\*

(荆州师范高等专科学校物理系, 荆沙 434100) (华中师范大学物理系, 武汉 430070)

**摘 要** 应用 Pegg-Barnett 位相理论, 研究了 Jaynes-Cummings 模型(J-C 模型)中压缩真空初态场位相演化特性, 具体计算了弱压缩条件下, 场的位相几率分布函数及位相涨落, 给出了在极坐标中位相几率分布演化曲线, 讨论了原子与场相互作用对场的位相性质的影响。

**关键词** 位相特性, 压缩真空态场, J-C 模型。

## 1 引 言

近年来, 由于 Pegg 和 Barnett 建立了厄米位相理论, 克服了前人关于光场位相描述不自洽的困难<sup>[1~3]</sup>, 人们对于量子光场位相特性的研究又产生极大兴趣。人们应用这一理论已广泛地研究了不同量子场的位相特性<sup>[4~7]</sup>, 以及原子与相干光场相互作用对其场的位相特性的影响<sup>[8~12]</sup>。这些研究表明, 不同物理系统场的位相性质是不同的。然而, 原子与压缩光场相互作用对其场的位相演化和统计性质如何影响, 对这一重要问题目前还没有人论及。

本文应用 Pegg-Barnett 位相理论研究 J-C 模型中初始时刻处于压缩真空态的场的位相随时间的演化特性。具体计算了弱压缩条件下场的位相几率分布函数及位相涨落, 并通过与单一压缩真空态场性质比较, 讨论了原子与压缩真空态场相互作用对场的位相性质的影响。

## 2 模型与态矢

描述具有相同宇称的两能级原子与单模量子场相互作用系统, 在旋波近似下的哈密顿(Hamiltonian)为

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 S_z + \epsilon(a S_+ + a^+ S_-), \quad (\hbar = 1), \quad (1)$$

式中  $a^+$  和  $a$  频率为  $\omega$  的光场的产生和湮灭算符,  $S_z$  和  $S_{\pm}$  为原子的能量和跃迁算符,  $\omega_0$  为原子的本征跃迁频率,  $\epsilon$  为原子与场的耦合常数。

设初始时刻( $t = 0$ ) 原子处于相干叠加态:

\* 国家自然科学基金和湖北省教委科研基金资助课题。

\*\* 中国高等科技中心(世界实验室), 北京。

收稿日期:1994年9月15日; 收到修改稿日期:1994年1月18日

$$|s\rangle = \cos \frac{\beta}{2} |+\rangle + \exp(-i\varphi) \sin \frac{\beta}{2} |-\rangle, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (2)$$

式中  $\beta$  的余弦、正弦分别代表原子处于激发态、基态的几率幅,  $\varphi$  代表位相。而场处于压缩真空态<sup>[13, 14]</sup>;

$$\left. \begin{aligned} |0, \zeta\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n |n\rangle, \\ F_n &= (n! \mu)^{-1/2} (\nu/2\mu)^{n/2} H_n(0), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中  $\mu = \cos hr$ ,  $\nu = \exp(i2\eta) \sin hr$ ,  $\zeta = r \exp(i2\eta)$ ,  $H_n(0)$  为厄米多项式。式中  $r$  为压缩参数,  $\eta$  为压缩角。为了简便起见, 假设系统处于共振条件下 ( $\omega - \omega_0 = 0$ )。在相互作用表象中, 可求得系统在任意时刻  $t$  的态矢为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(t) |+, n\rangle + B_n(t) |-, n\rangle], \quad (4)$$

$$A_n(t) = F_n \cos \frac{\beta}{2} \cos \sqrt{n+1} et - iF_{n+1} \exp(-i\varphi) \sin \frac{\beta}{2} \sin \sqrt{n+1} et, \quad (5)$$

$$B_n(t) = F_n \exp(-i\varphi) \sin \frac{\beta}{2} \cos \sqrt{n} et - iF_{n-1} \cos \frac{\beta}{2} \sin \sqrt{n} et. \quad (6)$$

### 3 位相几率分布与位相涨落

根据 Pegg-Barnett 的位相理论<sup>[1~3]</sup>, 定义一组正交完备的光场位相基矢:

$$|\theta_m\rangle = (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta_m) |n\rangle, \quad (7)$$

$$\theta_m = \theta_0 + 2m\pi/(s+1), \quad (8)$$

式中  $(s+1)$  为位相本征基矢张开的希尔伯特(Hilbert)空间的维数,  $\theta_0$  为参考位相。光场的厄米位相算符定义为

$$\phi = \sum_{m=0}^s \theta_m |q_m\rangle \langle \theta_m|. \quad (9)$$

显然,  $|\theta_m\rangle$  和  $\theta_m$  分别是位相算符  $\phi$  的本征态矢和本征值。

应用(4)和(7)式,  $|\psi(t)\rangle$  状态下的位相几率分布函数为

$$\begin{aligned} P(\theta_m, t) &= |\langle \theta_m | \psi(t) \rangle|^2 \\ &= (s+1)^{-1} [|\sum_{n=0}^s A_n \exp(-in\theta_m)|^2 + |\sum_{n=0}^s B_n \exp(-in\theta_m)|^2]. \end{aligned} \quad (10)$$

在连续谱极限 ( $s \rightarrow \infty$ ) 下,  $\theta_m$  变成连续变量, 这时  $P(\theta, t)$  为连续分布函数, 有

$$\begin{aligned} P(\theta, t) &= \frac{s+1}{2\pi} |\langle \theta | \psi(t) \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} [|\sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-in\theta)|^2 + |\sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(-in\theta)|^2]. \end{aligned} \quad (11)$$

式中  $(s+1)/2\pi$  为位相态的密度,  $A_n$ 、 $B_n$  分别由(5)和(6)式确定。在弱压缩条件下, 略去  $r$  的三阶及以上高阶小量, 则由(10)式可得

$$P(\theta, t) = P_1(\theta, t) + P_2(\theta, t) + P_{12}(\theta, t), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P_1(\theta, t) &= \frac{1}{2\pi} \cos^2 \frac{\beta}{2} [1 - r 2^{1/2} \cos 2(\theta - \eta) \cos(\sqrt{3} - 1) et \\ &\quad + r^2 (3/2)^{1/2} \cos 4(\theta - \eta) \cos(\sqrt{5} - 1) et], \end{aligned} \quad (13)$$

$$P_2(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \sin^2 \frac{\beta}{2} [1 - r 2^{1/2} \cos 2(\theta - \eta) \cos \sqrt{2} et + r^2 (3/2)^{1/2} \cos 4(\theta - \eta) \cos 2et], \quad (14)$$

$$P_{12}(\theta, t) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \{-\sin(\theta - \varphi) + r[2^{-1/2} \sin(\theta - 2\eta + \varphi) \sin(\sqrt{2} - 1)et + 2^{-1/2} \sin(3\theta - 2\eta - \varphi) \sin \sqrt{3} et] + r^2[(1/2) \sin(\theta - \varphi) - (1/2) \sin(\theta - \varphi) \sin(\sqrt{3} - \sqrt{2})et - (3/8)^{1/2} \sin(3\theta - 4\eta + \varphi) \sin et - (3/8)^{1/2} \sin(5\theta - 4\eta - \varphi) \sin \sqrt{5} et]\}. \quad (15)$$

显然有

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} P(\theta) d\theta = 1, \quad (16)$$

$P(\theta)$  是归一的。

(12)式的物理意义表明, 在原子与压缩真空初态场相互作用的系统中, 场的位相几率分布由  $P_1(\theta, t)$ ,  $P_2(\theta, t)$  及  $P_{12}(\theta, t)$  三项组成, 其中  $P_1(\theta, t)$ ,  $P_2(\theta, t)$  和  $P_{12}(\theta, t)$  分别代表初始时刻处于激发态、基态的原子以及两态的原子之间相互作用对位相几率分布的影响。

1) 当原子初始时刻处于激发态 ( $\beta = 0$ ) 时, 其位相几率分布为

$$P(\theta, t) = P_1(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} [1 - r 2^{1/2} \cos^2(\theta - \eta) \cos(\sqrt{3} - 1) et + r^2 (3/2)^{1/2} \cos 4(\theta - \eta) \cos(\sqrt{5} - 1) et]. \quad (17)$$

以  $\theta$  为极角, 以  $P(\theta, t)$  为极半径作  $P-\theta$  曲线。由(17)式可看出, 在某时刻, 若  $r = 0$  (真空态), 则  $P-\theta$  曲线为圆, 这表明真空态的位相完全是随机的; 若  $r$  取一阶小量, 则  $P-\theta$  曲线为椭圆, 当  $et = 0$  时, 其长半轴为  $(1 + 2^{1/2}r)/2\pi$ , 与  $x$  轴成  $\eta + \pi/2$  的夹角, 而短半短轴为  $(1 - 2^{1/2}r)/2\pi$ ; 若  $r$  取二阶小量, 则  $P-\theta$  曲线为一非标准椭圆。原子初始处于激发态时刻时位相几率分布随时间演化曲线(取  $\eta = 0$ ) 如图 1 所示。由图可看出, 当  $et = 0$  时  $P-\theta$  曲线为一非标准正椭圆, 长半轴沿  $y$  轴(图 1(a)); 当  $et = 2.1$  时为一非标准圆(图 1(b)); 当  $et = 4.2$  时又为一非标准正椭圆, 但长半轴转至沿  $x$  轴(图 1(c)); 当  $et = 6.3$  时又成一非标准圆(图 1(d)); 当  $et = 8.4$  时  $P-\theta$  曲线近似作了一周期变化。

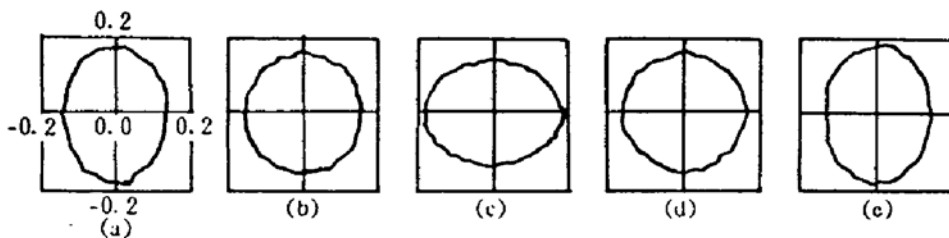


Fig. 1 Curves of evolution of the phas probability distribution then atom is initially in an excited state,  $\beta = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $r = 0.1$ , (a)  $et = 0$ , (b)  $et = 2.1$ , (c)  $et = 4.2$ , (d)  $et = 6.3$ , (e)  $et = 8.4$

2) 当原子初始时刻处于基态 ( $\beta = \pi$ ) 时, 其位相几率分布为

$$P(\theta, t) = P_2(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} [1 - r 2^{1/2} \cos 2(\theta - \eta) \cos \sqrt{2} et + r^2 (3/2)^{1/2} \cos 4(\theta - \eta) \cos 2et] \quad (18)$$

在这种情况下, 位相几率分布随时间的演化曲线如图 2 所示, 其演化过程与原子初始处于激

发态时相似,但变化周期近似为前一情况的 1/2。

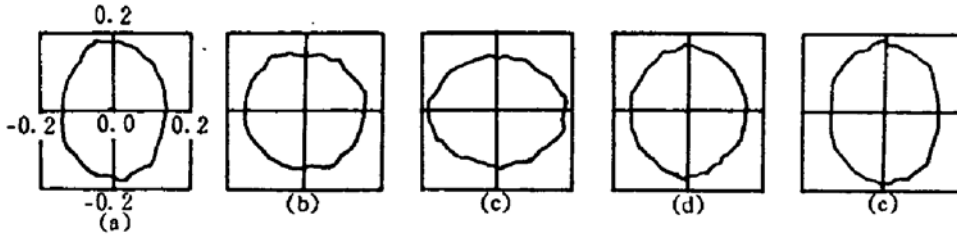


Fig. 2 Curves of evolution of the phase probability distribution then atom is initially in an ground state,  $\beta = \pi$ ,  $\eta = 0$ ,  $r = 0.1$ , (a)  $et = 0$ , (b)  $et = 1.2$ , (c)  $et = 2.4$ , (d)  $et = 3.6$ , (e)  $et = 4.8$

3) 当原子初始时刻处于相干叠加态 ( $\beta \neq 0, \pi$ ) 时,其位相几率分布由(12)式中  $P_1$ 、 $P_2$  及  $P_{12}$  三项确定。在这种情况下,位相几率分布随时间的演化曲线如图3所示(取  $\beta = \pi/4$ )。由图3可看出,当原子初态为相干叠加态时, $p-\theta$  曲线完全偏离椭圆而近似成桃形或心形曲线,图形随时间变化的周期性也差些。这些变化正是处于激发态的原子与处于基态的原子相干影响的结果。

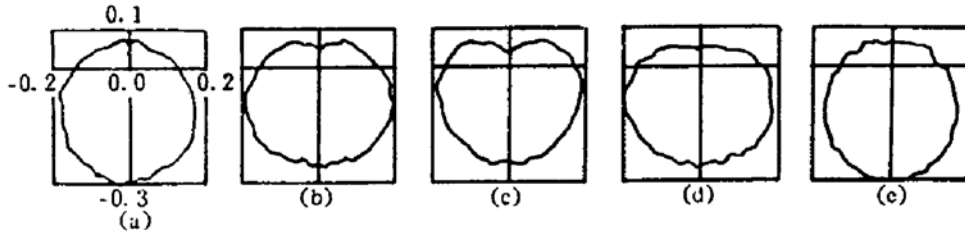


Fig. 3 Curves of evolution of the phase probability distribution then atom is initially in a coherent state,  $\beta = \pi/4$ ,  $\eta = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $r = 0.1$ , (a)  $et = 0$ , (b)  $et = 2.1$ , (c)  $et = 4.2$ , (d)  $et = 6.3$ , (e)  $et = 8.4$

作为例子,在初始时刻原子处于激发态弱压缩条件下,求场的位相期望值及位相涨落。一般有

$$\langle \phi \rangle = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \theta P(\theta) d\theta, \quad \langle \phi^2 \rangle = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \theta^2 P(\theta) d\theta. \quad (19)$$

将(17)式分别代入(19)式,则可得

$$\langle \phi \rangle = \theta_0 + \pi - r 2^{-1/2} \sin 2(\theta_0 - \eta) \cos(\sqrt{3} - 1)et + r^2(3/32)^{1/2} \sin 4(\theta_0 - \eta) \cos(\sqrt{5} - 1)et, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi^2 \rangle = & \theta_0^2 + 2\pi\theta_0 + (4/3)\pi^2 - r 2^{-1/2} [2(\theta_0 + \pi) \sin 2(\theta_0 - \eta) \\ & + \cos 2(\theta_0 - \eta)] \cos(\sqrt{3} - 1)et + r^2(3/128)^{1/2} [4(\theta_0 + \pi) \sin 4(\theta_0 - \eta) \\ & + \cos 4(\theta_0 - \eta)] \cos(\sqrt{5} - 1)et. \end{aligned} \quad (21)$$

这样不难求出位相涨落

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi^2 \rangle = & \langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2 \\ = & \pi^2/3 - r^{-1/2} \cos 2(\theta_0 - \eta) \cos(\sqrt{3} - 1)et + r^2(1/4) \{ [(3/8)^{1/2} \cos(\sqrt{5} - 1)et \\ & + \cos^2(\sqrt{3} - 1)et] \cos 4(\theta_0 - \eta) - \cos^2(\sqrt{3} - 1)et \}. \end{aligned} \quad (22)$$

由(20)和(22)式可看出,位相平均值  $\langle \phi \rangle$  和位相涨落  $\langle \Delta \phi^2 \rangle$  均与参考位相  $\theta_0$  有关,但在  $2\pi$  位相窗口内,  $\theta_0$  的选择可使  $\langle \phi \rangle$  在某一时刻有两个可能值,而  $\langle \Delta \phi^2 \rangle$  只存在一个单值。由于原子与场的相互作用,使得  $\langle \phi \rangle$  在  $(\theta_0 + \pi)$  或  $(\theta_0 + 2\pi)$  上下随时间  $et$  作周期变化,而  $\langle \Delta \phi^2 \rangle$  在  $\pi^2/3$  上下随时间  $et$  作周期变化。当  $t = 0$  时,由(20)和(22)式分别得压缩真空态场在弱压缩条

件下的相应结果<sup>[4]</sup>。

**结 语** 本文应用 Pegg-Barnett 的厄米位相理论, 系统地讨论了二能级原子与压缩真空初态场相互作用系统中场的位相演化特性。结果表明, 场的位相几率分布与位相涨落明显受原子与场相互作用的影响, 且与原子及压缩场初始状态有关。在弱压缩条件下, 极坐标中位相几率分布曲线一般呈非标准椭圆。由于原子与场相互作用, 该曲线呈周期性变化, 当  $et$  为一定值时为非标准圆。场的位相平均值和位相涨落分别与参考位相  $\theta_0$  的选择有关, 由于原子与场的相互作用, 它们分别在一定值上作周期变化。当  $et = 0$  时, 原子与场的相互作用影响消除, 系统场的位相特性与压缩真空场的位相特性相同。

### 参 考 文 献

- [1] D. T. Pegg, S. M. Barnett, Unitary phase operator in quantum mechanics. *Europhys. Lett.*, 1988, **6**(6): 483~487
- [2] S. M. Barnett, D. T. Pegg, On the Hermitian optical phase operator. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(1): 7~19
- [3] D. T. Pegg, S. M. Barnett, Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**(3): 1665~1675
- [4] J. A. Vaccaro, D. T. Pegg, Phase properties of squeezed states of light. *Opt. Commun.*, 1989, **70**(6): 529~534
- [5] R. Nath, P. Kumer, Phase properties of squeezed number states. *J. Mod. Opt.*, 1991, **38**(8): 1655~1658
- [6] A. V. Chizhov, B. K. Murzakhmetov, Photon statistics of two-mode squeezed number states. *Phys. Lett. (A)*, 1993, **176**(1): 33~40
- [7] 郭 弘, 郭光灿, 光场相位统计性质. *物理学报*, 1993, **42**(6): 918~924
- [8] H. X. Meng, C. L. Chai, Phase properties of coherent light in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Lett. (A)*, 1991, **155**(8, 9): 500~505
- [9] J. S. Peng, G. X. Li, Phase fluctuations of the light in the Jaynes-Cummings model within and without RWA. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(5): 3289~3293
- [10] J. S. Peng, G. X. Li, P. Zhou, Phase Property and atomic coherent trapping in the system of a three-level atom interacting with a bimodal field. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **46**(3): 1516~1521
- [11] 周 鹏, 与原子相互作用的量子光场的位相特性. *科学通报*, 1992, **37**(12): 906~910
- [12] A. F. Fan, Phase properties of a field in the Jaynes-Cummings model for non-resonant behaviour. *Opt. Commun.*, 1993, **98**: 340~348
- [13] H. P. Yuer, Two-photon coherent states of the radiation field. *Phys. Rev. (A)*, 1976, **13**(6): 2226~2243
- [14] R. Loudon, P. L. Knight, Squeezed light. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(6/7): 709~759

## Properties of the Phase Evolution of an Initially Squeezed Vacuum in the J-C Model

Wu Meijun

(Department of Physics, Jingzhou Teachers College, Jiangsha 434100)

Pen Jingsheng

(Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

(Received 15 September 1994; revised 18 January 1995)

**Abstract** The properties of the phase evolution of an initially squeezed vacuum in the Jaynes-Cummings model are studied by using the Pegg-Barnett phase theory. The phase probability distribution and variance are calculated for weak squeezing. The curves of evolution of the phase probability distribution are given on a polar diagram. The influences of an atom interacting with squeezed vacuum on the phase properties are discussed.

**Key words** phase property, Jaynes-Cummings model, squeezed vacuum.