

SU(2)相干态场与二能级原子的非简并双光子相互作用*

路 洪** 彭金生 吴美钧***

(华中师范大学物理系, 武汉 430070)

激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

摘 要 研究了双模 SU(2)相干态场与腔中二能级原子的非简并双光子相互作用。用数值计算讨论了 SU(2)光场的反关联特性对原子动力学行为的影响及场的量子统计性质随时间的演化。

关键词 SU(2)相干态, 反关联, 非简并双光子过程。

1 引 言

1987年 Brune 等人成功地做成了第一台单模双光子微波激射器(maser), 这一进展使得对双光子过程的研究更具有实际意义。最近的工作已经深入到对二能级原子的非简并双光子跃迁过程的研究^[1~5]。双模微波激射器的设想也已经被提出^[6]。另一方面, 由于关联的双模辐射场^[3, 7, 8]与双光子非线性光学过程有着密切联系, 而且往往表现出反聚束、亚泊松分布, 违背科希-许瓦兹不等式及压缩等非经典场的特性, 如何产生关联的双模场, 以及这样的场与原子系统相互作用的特性等问题, 已经引起了人们的高度重视。

本文将研究与李群 SU(2)有关的关联双模场即 SU(2)相干态场^[8, 9]与二能级原子的非简并双光子相互作用。由于 SU(2)相干态场的两个场模光子之间具有反关联(anticorrelation)和亚泊松分布特征, 并将考察这种反关联对二能级原子动力学行为的影响。文中还讨论它与原子体系作用后, 场的量子统计性质如何随时间而演化。并将证明, SU(2)相干态光场与二能级原子作用后, 光子的亚泊松分布仍然存在, 但是双模场将不再满足科希-许瓦兹(Cauchy-Schwartz)不等式。同时, 拉比(Rabi)振荡也展现出与其它初场时截然不同的特征。

2 描述系统的态函数

考虑双模光场与二能级原子的相互作用, 如图 1 所示。原子的两个能级具有相同的宇称,

* 国家自然科学基金和湖北省自然科学基金资助项目。

** 现在广东佛山大学物理系工作, 528000。

*** 现在湖北荆州师专工作, 434104。

收稿日期: 1994年4月26日; 收到修改稿日期: 1994年8月11日

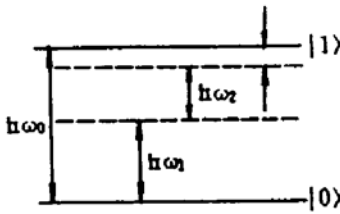


Fig. 1 The two-level atom interacting with the two-mode field

跃迁由非简并双光子吸收或发射来传递,体系的哈密顿为

$$H = H_0 + V,$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_0 + \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2,$$

$$V = g(a_1^\dagger a_2^\dagger \sigma_- + a_1 a_2 \sigma_+) \quad (1)$$

在相互作用表象中,哈密顿量 H 化为

$$H_I = \exp(iH_0 t) V \exp(-iH_0 t)$$

$$= g[a_1^\dagger a_2^\dagger \sigma_- \exp(-i\Delta t) + a_1 a_2 \sigma_+ \exp(i\Delta t)] \quad (2)$$

式中 $\Delta = \omega_0 - \omega_1 - \omega_2$ 是失谐量。设 $t = 0$ 时原子处于激发态 $|1\rangle$, 而双模光场处于态 $|\psi'(0)\rangle$,

$$|\psi'(0)\rangle_f = \sum_{n_1, n_2} F_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle \quad (3)$$

其中 $|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$, 而 $|F_{n_1, n_2}|^2 = P_f(n_1, n_2)$ 表示在 $|\psi'(0)\rangle_f$ 态中场模 1 有 n_1 个光子而场模 2 有 n_2 个光子的几率。在 t 时刻, 原子与光场耦合体系在相互作用表象中的态矢一般可以设为

$$|\psi'(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2} F_{n_1, n_2} [C_{1n_1, n_2}(t) |1; n_1, n_2\rangle + C_{0n_1, n_2}(t) |0; n_1 + 1, n_2 + 1\rangle] \quad (4)$$

将上式代入薛定谔方程

$$i \frac{d}{dt} |\psi'(t)\rangle = V_I |\psi'(t)\rangle \quad (5)$$

并利用初始条件, 不难得到(4)式中的各系数为

$$C_{1n_1, n_2}(t) = \frac{1}{2\Omega_{n_1, n_2}} \left\{ \left(\frac{\Delta}{2} + \Omega_{n_1, n_2} \right) \exp \left[i \left(\frac{\Delta}{2} - \Omega_{n_1, n_2} \right) t \right] - \left(\frac{\Delta}{2} - \Omega_{n_1, n_2} \right) \exp \left[i \left(\frac{\Delta}{2} + \Omega_{n_1, n_2} \right) t \right] \right\}$$

$$C_{0n_1, n_2}(t) = \frac{g}{2\Omega_{n_1, n_2}} \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \left\{ \exp \left[-i \left(\frac{\Delta}{2} + \Omega_{n_1, n_2} \right) t \right] - \exp \left[-i \left(\frac{\Delta}{2} - \Omega_{n_1, n_2} \right) t \right] \right\} \quad (6)$$

$$\Omega_{n_1, n_2} = \sqrt{(\Delta/2)^2 + g^2(n_1 + 1)(n_2 + 1)} \quad (7)$$

式中 Ω 为拉比频率。将(6)式代入(4)式, 并结合光场的初始条件, 描述体系的态矢量就完全确定了。

在本文中, 取双模辐射场的初态为 $SU(2)$ 相干态。 $SU(2)$ 相干态在量子光学中有着较为广泛的应用^[9], 在其玻色表示中, 它有如下形式^[8]

$$|M, \tau\rangle = (1 + |\tau|^2)^{-M/2} \sum_{n=0}^M \begin{bmatrix} M \\ n \end{bmatrix} \tau^n |n, M - n\rangle \quad (8)$$

式中常数 M 为双模场的总光子数, 复参数 τ 与两模的光子数分配有关。引入配分参量^[10] $S = |\tau|^2 / (1 + |\tau|^2)$, 容易得到在 $SU(2)$ 相干态中场模 1 有 n 个光子, 场模 2 有 $M - n$ 个光子的概率为

$$P(n, M - n) = \begin{bmatrix} M \\ n \end{bmatrix} S^n (1 - S)^{M-n} \quad (9)$$

即 $SU(2)$ 相干态场的光子是二项分布的。另外, 从(8)式可知, 当双模场处于 $SU(2)$ 相干态时, 两个场模的光子数之和为定值。这表明两模之间存在很强的关联(实际上是反关联)^[8, 10]。

最近, Bužek 和 Knight 提出^[11], 可以经线性定向耦合器产生这样的 SU(2)相干态。

若取光场的初态为 SU(2)相干态时, 比较(3)、(8)两式, 立即得光子分布函数

$$F_{n_1, n_2} = F_{n, M-n} = (1 + |\tau|^2)^{-M/2} \begin{bmatrix} M \\ n \end{bmatrix} \tau^n \tag{10}$$

拉比频率现在是 $\Omega_n = \sqrt{(\Delta/2)^2 + g^2(n+1)(M-n+1)}$ 。由(4)、(6)、(10)式, 最终得到相互作用表象中的态矢为

$$\begin{aligned} |\psi_I(t)\rangle = & (1 + |\tau|^2)^{-M/2} \sum_{n=0}^M \begin{bmatrix} M \\ n \end{bmatrix} \tau^n (1/2\Omega_n) \left(\{(\Delta/2 + \Omega_n) \exp [i(\Delta/2 - \Omega_n)t] \right. \\ & - (\Delta/2 - \Omega_n) \exp [i(\Delta/2 + \Omega_n)t]\} |1; n, M-n\rangle + g \sqrt{(n+1)(M-n+1)} \\ & \left. \{ \exp [-i(\Delta/2 + \Omega_n)t] - \exp [-i(\Delta/2 - \Omega_n)t]\} |0; n+1, M-n+1\rangle \right) \tag{11} \end{aligned}$$

由上式可知, 由于初始 SU(2)相干态两模之间光子的关联, 在(4)式中态矢的双重求和现在已经变成了单重求和。这一事实表明: 尽管由于与原子体系的相互作用使得在 $t > 0$ 后的光场不再是 SU(2)场, 初始光场的关联特性却将延续到任一时刻, 从而影响原子-光场耦合体系的动力学行为。

3 原子的动力学行为

原子的拉比振荡的特征与初始光场的量子统计性质往往有着很直接的关系^[12, 13]。由(11)式可以求得原子的粒子数反转

$$\begin{aligned} \langle \sigma_3 \rangle = & \sum_{n=0}^M P_f(n) [P_1(n, t) - P_0(n, t)] = \sum_{n=0}^M |F_{n, M-n}|^2 (|C_{1, n, M-n}|^2 - |C_{0, n, M-n}|^2) \\ = & \sum_{n=0}^M \begin{bmatrix} M \\ n \end{bmatrix} S^n (1 - S)^{M-n} \frac{(\Delta/2g)^2 + (n+1)(M-n+1) \cos 2\Omega_n t}{(\Delta/2g)^2 + (n+1)(M-n+1)} \tag{12} \end{aligned}$$

上式的数值计算结果如图 2~图 4 所示。从图 2 可以看到, 当 $S = 0.5$ (两模的平均光子数相等) 时, 拉比振荡是准周期性的, 但振幅逐渐衰减。这是由于当 $S = 0.5$ 时, (12) 式中的二项分布对称于 $n = M/2$, 且在 $n = M/2$ 处有一尖锐的最大值, 对应于 $n = M/2$ 的拉比频率起主导作用 (不难看出, 图 2 中的振荡频率即为 $\Omega_{M/2}$), 而其它频率的项的干涉则使振幅逐渐衰减。图 3 表明, 当 $S = 0.1$ (两模的光子数之比为 1:9) 时, 拉比振荡

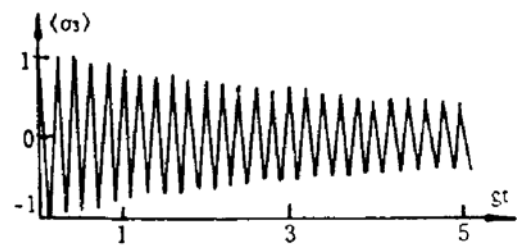


Fig. 2 Time evolution of $\langle \sigma_3 \rangle$ with $m = 30$, $S = 0.5$, $\Delta = 0$

展示出纯量子特性的崩溃与回复现象, 但并不具有周期性。这与以另两类关联双模场即关联相干态 (Pair coherent state)^[2] 和双模 SU(1, 1)相干态^[3] 作为光场初态时得到的周期性崩溃与回复现象极为不同。在图 4 中, 给出了失谐量 Δ 对崩溃回复效应的影响。从图 4 可看到, 失谐使崩溃回复现象更为明显, 同时使原子处于激发态的几率增加。

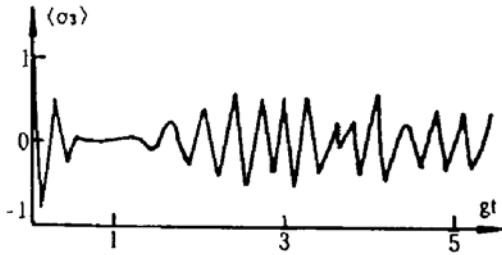


Fig. 3 Same as Fig. 2 but with $S = 0.1$

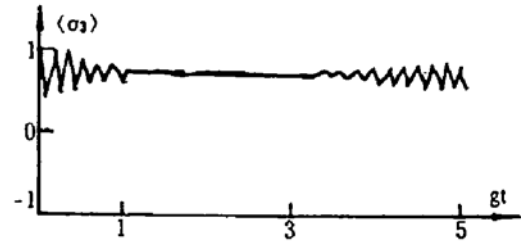


Fig. 4 Same as Fig. 2 but with $S = 0.1, \Delta = 30g$

4 场的量子统计性质

下面讨论 SU(2)相干态场与二能级原子作用后, 场的量子统计性质。

4.1 光子的亚泊松分布

Mandel Q 参量^[12]反映了光子数分布对泊松分布的偏离, 是一个重要的统计参量。它定义为

$$Q(t) = \frac{\langle (\Delta N)^2 \rangle - \langle N \rangle}{\langle N \rangle} \quad (13)$$

对于相干态, 光子是泊松分布的, 上式的值为零。当 $Q(t) < 0$ 时, 称光场为亚泊松分布的。只有非经典场才有 $Q(t) < 0$ 。Bužek 和 Quang 已经指出^[8] SU(2)相干态场的两个模的光子都是亚泊松分布的。在图 5~图 7 中, 给出了 SU(2)场与原子体系作用后 Q 参量随时间的演化。从图 5 可见, 当 $S = 0.5$ 时, 总有 $Q_1(t) = Q_2(t) < 0$, 即光场的亚泊松特点不会改变, 但平均程度加深。当 $S = 0.1$ 时(见图 6~图 7), 并注意到 Q_2 总是小于零,

Fig. 5 Time evolution of $Q_1(Q_2 = Q_1)$ with $m = 30, S = 0.5, \Delta = 0$

然而 Q_1 有可能在某些时刻大于零, 即变得超泊松的。同时, 比较图 6 和图 7 可以发现一个有趣的现象: $Q_1(t)$ 和 $Q_2(t)$ 的变化趋势恰好相反。当 Q_1 增加时, Q_2 减少, 反之亦然。这充分反映了两个模的光子之间的反关联对光子分布规律的影响。

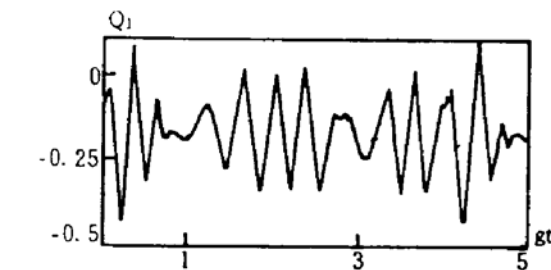


Fig. 6 Time evolution of Q_1 with $m = 30, S = 0.1, \Delta = 0$

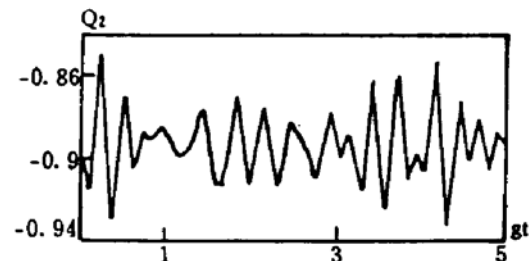


Fig. 7 Time evolution of Q_2 with $m = 30, S = 0.1, \Delta = 0$

4.2 科希-许瓦兹不等式

对于双模场, 科希-许瓦兹不等式是

$$\langle a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 \rangle^2 \leq \langle a_1^{+2} a_1^2 \rangle \langle a_2^{+2} a_2^2 \rangle \quad (14)$$

为了反映对上式偏离的相对程度, 引入参量 I_0 ,

$$I_0 = \frac{[\langle a_1^2 a_1^2 \rangle \langle a_2^2 a_2^2 \rangle]^{1/2}}{|\langle a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 \rangle|} - 1 \quad (15)$$

当 $I_0 < 0$ 时, 意味着(14)式不成立, 光场具有非经典的特性。利用(8)式, 通过直接计算可得到当 $t = 0$ 时 $I_0 = 0$, 即对于纯粹的 SU(2)相干态场, 科希-许瓦兹不等式是成立的。当 $t > 0$ 时, 以 $M = 2$ 为例, 将(15)式的数值解示于图 8 ~ 图 9, 从图 8 可见, 如果 $S = 0.5$, 随着 t 增长, I_0 总是小于零, 即科希-许瓦兹不等式总是不成立 (M 较大时仍有此结论)。图 9 则显示, 当 $S = 0.1$ 时, I_0 的最小值比 $S = 0.5$ 时要小, 然而在某些瞬时有可能出现 $I_0 > 0$ 。

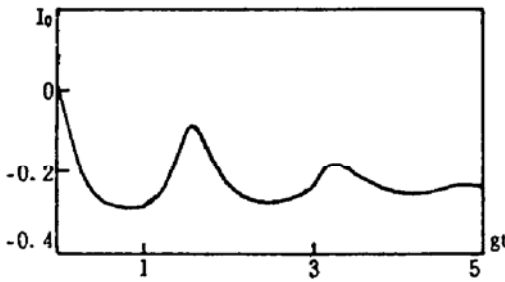


Fig. 8 Time evolution of I_0 with $m = 2$, $S = 0.5$, $\Delta = 0$

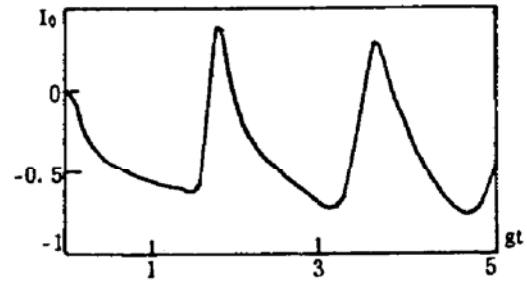


Fig. 9 Same as Fig. 8 but with $S = 0.1$

4.3 场的互关联函数随时间的演化

众所周知, 场的互关联函数定义为^[10]

$$g_{i_2}^{(2)}(t) = \frac{\langle a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 \rangle}{\langle a_1^+ a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle} \quad (16)$$

当 $g_{i_2}^{(2)}(t) > 1$, 称场的两个模是关联的; $g_{i_2}^{(2)}(t) < 1$, 则是反关联的。从图 10 和图 11 可看到, 与原子系统相互作用后, $g_{i_2}^{(2)}(t)$ 随时间而振荡, 但总是小于 1 的。这说明与原子的相互作用不会破坏 SU(2) 相干态场两模间的反关联, 但是将造成关联程度的起伏。另外, 注意到互关联函数 $g_{i_2}^{(2)}(t)$ 与粒子数反转 $\langle \sigma_3 \rangle$ 的变化规律有很密切的关系。比较图 10 与图 2, 图 11 与图 3 将发现, 在 $g_{i_2}^{(2)}(t)$ 的每一个极小值所对应的时刻, $\langle \sigma_3 \rangle$ 恰好取极大值。这意味着在原子的受激发射即将发生的时刻, 两个场模的反关联最强。

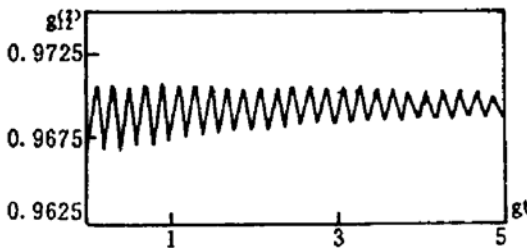


Fig. 10 Time evolution of $g_{i_2}^{(2)}$ with $m = 30$, $S = 0.5$, $\Delta = 0$

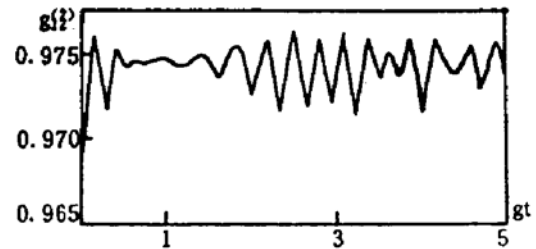


Fig. 11 Same as Fig. 10 but with $S = 0.1$

结 论 本文的研究结果表明, SU(2)相干态两模间的反关联特性对原子的动力学行为及两模的 Mandel Q 参量均有重大影响。原子的拉比振荡呈现出与其它关联双模场(如 SU(1,1)场)为初态场时显著不同的特征。二能级原子与 SU(2)场的非简并双光子相互作用虽然不能破坏场的反关联特性, 却会使关联的程度出现起伏。另外, SU(2)相干态场与二能级原子作用后, 光场将不再满足科希-许瓦兹不等式。

参 考 文 献

- [1] S. C. Gou, Quantum behavior of a two-level atom interacting with two modes of light in a cavity. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **44**(9) : 5116~5128
- [2] A. Joshi, R. R. Puri, Characteristics of Rabi oscillations in the two-mode squeezed state of the field. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **42**(7) : 4336~4342
- [3] C. C. Gerry, R. F. Welch, Dynamics of a two-mode two-photon Jaynes-Cummings model interacting with correlated $SU(1, 1)$ coherent states. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1992, **9**(2) : 290~297
- [4] J. S. Peng(彭金生), G. X. Li(李高翔), Phase properties and atomic coherent trapping in the system of a three-level atom interacting with the bimodel field. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **46**(3) : 1516~1512
- [5] J. S. Peng(彭金生), G. X. Li(李高翔), Influence of the virtual-photon processes on the squeezing of light in the two-photon Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **47**(4B) : 3167~3172
- [6] P. A. Maia Neto, L. Davidovich, J. M. Raimond, Theory of the nondegenerate two-photon micromaser. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **43**(9) : 5073~5076
- [7] G. S. Agarwal, Generation of pair coherent states and squeezing via the competition of Four-wave mixing and amplified spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**(7) : 827~830
- [8] V. Bužek, T. Quang, Generalized coherent state for bosonic realization of $SU(2)$ Lie algebra. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1989, **6**(12) : 2447~2449
- [9] K. Wódkiewicz, J. H. Eberly, Coherent states, squeezed fluctuations and the $SU(2)$ and $SU(1, 1)$ groups in quantum-optics applications. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1985, **2**(3) : 458~466
- [10] W. K. Lai, V. Bužek, P. L. Knight, Interaction of a three-level atom with an $SU(2)$ coherent state, *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(3) : 2003~2012
- [11] W. K. Lai, V. Bužek, P. L. Knight, Nonclassical fields in a linear directional coupler. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **43**(11) : 6323~6336
- [12] B. W. Shore, P. L. Knight, The Jaynes-Cummings model. *J. Mod. Opt.*, 1993, **40**(7) : 1195~1238
- [13] 路 洪, 彭金生, $SU(1, 1)$ 相干态光场的统计特性及其对原子动力学行为的影响. *物理学报*, 1994, **43**(11) : 1787~1794

Nondegenerate Two-Photon Interaction of $SU(2)$ Coherent State with a Two-Level Atom

Lu Hing Peng Jinsheng Wu Meijun

(Physics Department, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

(National Laboratory of Laser Technology, Wuhan 430074)

(Received 26 April 1994; revised 11 August 1994)

Abstract In this paper, we studied the nondegenerate two-photon interaction of $SU(2)$ coherent state with a two-level atom in a cavity, and discussed the influence of the anticorrelation property of $SU(2)$ coherent state on the atomic dynamic behavior. The time evolution of the quantum statistics properties of the light field is also discussed.

Key words $SU(2)$ coherent state, anticorrelation, nondegenerate two-photon process.