

Λ 型双模激光的朗之万理论*

胡响明

(华中师范大学应用物理研究所, 武汉 430070)

摘 要 采用朗之万激光理论讨论 Λ 型双模激光近阈运行的模式耦合特性, 双模既可以呈现相互抑制和相互支持, 又可以呈现一模被抑制另一模被支持以及一模或双模既不被支持又不被抑制。耦合特性不仅取决于双模失谐量, 而且与原子三能级初始布居紧密相关。

关键词 双模激光, 耦合, 支持, 竞争。

1 引 言

近年来, 人们对双模或多模激光进行了广泛的研究^[1~10]。模式耦合是双模或多模激光非常重要的特性之一。文献[1(a), 2]采用兰姆半经典理论表明, 两能级双模激光的模式耦合呈现相互竞争, 三能级 Λ 型双模激光也呈现相互竞争, 三能级 Ξ 型双模激光则呈现相互支持。文献[9, 10]采用兰姆量子理论^[16]表明, Ξ 型双模激光既可以呈现相互支持, 也可以呈现模 2 抑制模 1 的情形, Λ 型双模激光既可以呈现相互竞争也可以呈现相互支持。

本文采用朗之万量子理论^[16]表明, Λ 型双模激光的模式耦合, 不但可以呈现相互抑制和相互支持, 而且还可以呈现一模被抑制另一模被支持, 以及一模或双模既不被支持也不被抑制的情形。耦合的特性同时取决于双模的失谐和三能级的初始布居。

2 双模朗之万方程

Λ 型原子的能级如图 1 所示。a、b 和 c 三个能级的非相干泵浦算子分别为 A_a 、 A_b 和 A_c , 衰变常数分别为 γ_a 、 γ_b 和 γ_c 。a-b、a-c 和 b-c 跃迁过程的缓变平均极化算子分别为 Σ_1 、 Σ_2 和 Σ_3 , 相应的衰变常数分别为 γ_1 、 γ_2 和 γ_3 。双模光场的湮灭算子分别为 A_1 和 A_2 , 相应的频率分别为 ν_1 和 ν_2 , 分别与原子的跃迁频率 ω_1 和 ω_2 以及空腔频率 Ω_1 和 Ω_2 接近共振, 光腔对双模的品质因素分别为 Q_1 和 Q_2 , 腔损系数分别为 $\nu_1/2Q_1$ 和 $\nu_2/2Q_2$ 。双模光场与原子的耦合常数分别为 g_1 和 g_2 。在电偶极近似下, 原子-场相互作用哈密顿为:

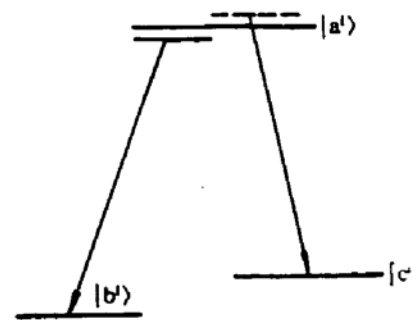


Fig. 1 Λ -type three level atomic diagram

* 华中师范大学自然科学基金资助。

收稿日期: 1994 年 6 月 14 日; 收到修改稿日期: 1994 年 8 月 29 日

$$V = \hbar N(g_1 A_1^\dagger \sum_1 + g_1^* \sum_1^\dagger A_1) + \hbar N(g_2 A_2^\dagger \sum_2 + g_2^* \sum_2^\dagger A_2) \quad (1)$$

考虑光子数不太大即近阈运行的情况^[1, 2],

$$2|g_i|^2 \langle A_i^\dagger A_i \rangle \mathcal{L}_i \leq \gamma_i R_{si}, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

得到双模激光的朗之万方程为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_1 &= -[\nu_1/2Q_1 + i(\omega_1 - \nu_1)]A_1 + \mathcal{A}_{1c}A_1 - \mathcal{B}_{1c}A_1 \langle A_1^\dagger A_1 \rangle - Q_{12}A_1 \langle A_2^\dagger A_2 \rangle + G_1 \\ \dot{A}_2 &= -[\nu_2/2Q_2 + i(\omega_2 - \nu_2)]A_2 + \mathcal{A}_{2c}A_2 - \mathcal{B}_{2c}A_2 \langle A_2^\dagger A_2 \rangle - Q_{21}A_2 \langle A_1^\dagger A_1 \rangle + G_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

方程(3)和(4)中 \mathcal{A}_{ic} 、 \mathcal{B}_{ic} 和 θ_{ij} ($i \neq j$) 分别是模 i 的复线性增益系数, 复自饱和系数和复交叉饱和系数^[1a, 2]。它们的表达式是

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_{1c} &= |g_1|^2 \mathcal{D}_1(N_a - N_b), & \mathcal{A}_{2c} &= |g_2|^2 \mathcal{D}_2(N_a - N_c) \\ \mathcal{B}_{1c} &= 2\mathcal{A}_{1c} |g_1|^2 \mathcal{L}_1/\gamma_1 R_{s1}, & \mathcal{B}_{2c} &= 2\mathcal{A}_{2c} |g_2|^2 \mathcal{L}_2/\gamma_2 R_{s2} \\ \theta_{12} &= |g_1 g_2|^2 [\mathcal{D}_1^* \mathcal{D}_3(N_a - N_b) + (\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2^* \mathcal{D}_3 + \mathcal{D}_1 2\mathcal{L}_2/\gamma_2 \gamma_a)(N_a - N_c)] \\ \theta_{21} &= |g_1 g_2|^2 [\mathcal{D}_1^* \mathcal{D}_3(N_a - N_c) + (\mathcal{D}_1^* \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_3 + \mathcal{D}_2 2\mathcal{L}_1/\gamma_1 \gamma_a)(N_a - N_b)] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中, 复参数为:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= [\gamma_1 + i(\omega_1 - \nu_1)]^{-1}, & \mathcal{D}_2 &= [\gamma_2 + i(\omega_2 - \nu_2)]^{-1}, \\ \mathcal{D}_3 &= [\gamma_3 + i(\omega_1 - \omega_2 - \nu_1 + \nu_2)]^{-1}, \end{aligned}$$

速率参数

$$R_{s1} = (\gamma_a^{-1} + \gamma_b^{-1})^{-1}, \quad R_{s2} = (\gamma_a^{-1} + \gamma_c^{-1})^{-1}$$

无量纲洛仑兹函数

$$\mathcal{L}_1 = \gamma_1^2 [\gamma_1^2 + (\omega_1 - \nu_1)^2]^{-1}, \quad \mathcal{L}_2 = \gamma_2^2 [\gamma_2^2 + (\omega_2 - \nu_2)^2]^{-1}$$

以及初始布居数

$$N_i = N \langle A_i \rangle / \gamma_i, \quad i = a, b, c$$

采用半经典极限,

$$\langle A_j \rangle = \sqrt{n_j(t)} \exp[-i\phi_j(t)], \quad j = 1, 2 \quad (5)$$

其中, n_j 和 ϕ_j 分别是模 j ($j = 1, 2$) 的平均光子数和相位。对(3)式和(4)式取库平均, 利用朗之万力的特性, $\langle G_1 \rangle = \langle G_2 \rangle = 0$, 并忽视 A_i 和 A_i^\dagger 的排序问题^[1c], 得到双模激光平均光子数的运动方程为:

$$\dot{n}_1 = (\mathcal{A}_1 - \nu_1/Q_1)n_1 - \mathcal{B}_1 n_1^2 - \theta_{12} n_1 n_2, \quad \dot{n}_2 = (\mathcal{A}_2 - \nu_2/Q_2)n_2 - \mathcal{B}_2 n_2^2 - \theta_{21} n_1 n_2 \quad (6)$$

其中, \mathcal{A}_i 、 \mathcal{B}_i 和 θ_{ij} ($i \neq j$) 分别是模 i 的实线性增益系数、实自饱和系数和实交叉饱和系数, 它们的表达式为:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_i &= 2R_s \mathcal{A}_{ic}, & \mathcal{B}_i &= 2R_s \mathcal{B}_{ic}, & i &= 1, 2 \\ \theta_{12} &= 2R_s \theta_{12}, & \theta_{21} &= 2R_s \theta_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

方程(6)就是本文分析双模激光模式耦合的基本方程。模式耦合的特征就在于, 由于双模失谐和原子初始布居的不同, 实交叉饱和系数 θ_{12} 和 θ_{21} 或者为正, 或者为负, 或者为零。由于(6)式中实交叉饱和项(即正比于 θ_{ij} 的项)前为负号, 故当 θ_{ij} ($i \neq j$) 为正、负或零分别对应模 i 被抑制、被支持或既不被支持也不被抑制。

3 模式耦合

为了简单起见, 假定原子的衰减常数相等^[4~7, 9, 10], 即 $\gamma_a = \gamma_b = \gamma_c = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$ 。讨论两种情况: 失谐相等, 即 $\omega_1 - \nu_1 = \omega_2 - \nu_2 = \Delta$ 与失谐反号相等, 即 $\omega_1 - \nu_1 = \nu_2 - \omega_2 = \Delta$ 。稳定物理解要求 $N_a > N_b$, $N_a > N_c$ 。另外双模的性质具有互换性。

3.1 $\omega_1 - \gamma_1 = \omega_2 - \gamma_2 = \Delta$ (拉曼共振)

此时, 交叉饱和系数为:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{12} &= [2|g_1g_2|^2/\gamma(\gamma^2 + \Delta^2)^2] [(\gamma^2 - \Delta^2)(N_a - N_b) + (3\gamma^2 + \Delta^2)(N_a - N_c)] \\ \theta_{21} &= [2|g_1g_2|^2/\gamma(\gamma^2 + \Delta^2)^2] [(\gamma^2 - \Delta^2)(N_a - N_c) + (3\gamma^2 + \Delta^2)(N_a - N_b)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对于 $N_b = N_c$ 特例, 总有 $\theta_{12} > 0$, $\theta_{21} > 0$ 。双模相互抑制。通常被注意的就是这种情况^[4~6, 9]。

对于 $N_b \neq N_c$, 有下列几种情况:

- 1) 当 $\Delta^2 \leq \gamma^2$, 总有 $\theta_{12} > 0$, $\theta_{21} > 0$;
- 2) 当 $\Delta^2 > \gamma^2$ 及 $N_a - N_b < [(\Delta^2 + 3\gamma^2)/(\Delta^2 - \gamma^2)](N_a - N_c) < [(\Delta^2 + 3\gamma^2)/(\Delta^2 - \gamma^2)]^2(N_a - N_b)$, 则 $\theta_{12} > 0$, $\theta_{21} > 0$, 双模相互竞争;
- 3) 当 $\Delta^2 > \gamma^2$ 及 $N_a - N_b < [(\Delta^2 - \gamma^2)/(\Delta^2 + 3\gamma^2)](N_a - N_c)$, 则 $\theta_{12} > 0$, $\theta_{21} < 0$;
- 4) 当 $\Delta^2 > \gamma^2$ 及 $N_a - N_c < [(\Delta^2 - \gamma^2)/(\Delta^2 + 3\gamma^2)](N_a - N_b)$, 则 $\theta_{12} < 0$, $\theta_{21} > 0$ 。一模被抑制, 另一模被支持。
- 5) 当 $(N_a - N_b)/(N_a - N_c) = (\Delta^2 + 3\gamma^2)/(\Delta^2 - \gamma^2)$, 则 $\theta_{12} = 0$, $\theta_{21} > 0$;
- 6) 当 $(N_a - N_c)/(N_a - N_b) = (\Delta^2 + 3\gamma^2)/(\Delta^2 - \gamma^2)$, 则 $\theta_{21} = 0$, $\theta_{12} > 0$, 一模被抑制, 另一模既不被支持也不被抑制。

3.2 $\omega_1 - \nu_1 = \nu_2 - \omega_2 = \Delta$

此时, 交叉饱和系数为

$$\left. \begin{aligned} \theta_{12} &= 2|g_1g_2|^2\gamma \frac{(\gamma^2 - 5\Delta^2)(N_a - N_b) + 3(\gamma^2 + \Delta^2)(N_a - N_c)}{(\gamma^2 + \Delta^2)^2(\gamma^2 + 4\Delta^2)}, \\ \theta_{21} &= 2|g_1g_2|^2\gamma \frac{(\gamma^2 - 5\Delta^2)(N_a - N_c) + 3(\gamma^2 + \Delta^2)(N_a - N_b)}{(\gamma^2 + \Delta^2)^2(\gamma^2 + 4\Delta^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

对于 $N_b = N_c$ 的特例, 当 $\Delta^2 < 2\gamma^2$, 则 $\theta_{12} > 0$, $\theta_{21} > 0$, 双模相互抑制; 当 $\Delta^2 > 2\gamma^2$, 则 $\theta_{12} < 0$, $\theta_{21} < 0$, 双模相互支持; 当 $\Delta^2 = 2\gamma^2$, 有 $\theta_{12} = \theta_{21} = 0$, 双模之间无耦合, 既不被支持也不被抑制。

对于 $N_b \neq N_c$, 有下列几种情况:

- 1) 当 $\Delta^2 \leq \gamma^2/5$, 总有 $\theta_{12} > 0$, $\theta_{21} > 0$;
- 2) 当 $\gamma^2/5 < \Delta^2 < 2\gamma^2$ 及 $N_a - N_b < [3(\gamma^2 + \Delta^2)/(5\Delta^2 - \gamma^2)](N_a - N_c) < [3(\gamma^2 + \Delta^2)/(5\Delta^2 - \gamma^2)]^2(N_a - N_b)$, 则 $\theta_{12} > 0$, $\theta_{21} > 0$ 。双模相互抑制。
- 3) 当 $\Delta^2 > 2\gamma^2$ 及 $N_a - N_b > [3(\gamma^2 + \Delta^2)/(5\Delta^2 - \gamma^2)](N_a - N_c) > [3(\gamma^2 + \Delta^2)/(5\Delta^2 - \gamma^2)]^2(N_a - N_b)$, 则 $\theta_{12} < 0$, $\theta_{21} < 0$, 双模相互支持。
- 4) 当 $\Delta^2 > 2\gamma^2$ 及 $N_a - N_b > [(5\Delta^2 - \gamma^2)/3(\gamma^2 + \Delta^2)](N_a - N_c)$, 则 $\theta_{12} < 0$, $\theta_{21} > 0$;
- 5) 当 $\Delta^2 > 2\gamma^2$ 及 $N_a - N_c > [(5\Delta^2 - \gamma^2)/3(\gamma^2 + \Delta^2)](N_a - N_b)$, 则 $\theta_{12} > 0$, $\theta_{21} < 0$;
- 6) 当 $\gamma^2/5 < \Delta^2 < 2\gamma^2$ 及 $N_a - N_b > [3(\gamma^2 + \Delta^2)/(5\Delta^2 - \gamma^2)](N_a - N_c)$, 则 $\theta_{12} < 0$, $\theta_{21} > 0$;
- 7) 当 $\gamma^2/5 < \Delta^2 < 2\gamma^2$ 及 $N_a - N_c > [3(\gamma^2 + \Delta^2)/(5\Delta^2 - \gamma^2)](N_a - N_b)$, 则 $\theta_{12} > 0$, $\theta_{21} < 0$, 一模被支持一模被抑制。
- 8) 当 $(N_a - N_b)/(N_a - N_c) = 3(\gamma^2 + \Delta^2)/(5\Delta^2 - \gamma^2)$, 则 $\theta_{12} = 0$ 。如果 $\Delta^2 < 2\gamma^2$, 则 $\theta_{21} > 0$; 如果 $\Delta^2 > 2\gamma^2$, 则 $\theta_{21} < 0$; 如果 $\Delta^2 = 2\gamma^2$, 则 $\theta_{21} = 0$ 。上述为模 1 既不被支持也不被抑制, 模 2 或被抑制, 或被支持, 或者既不被支持也不被抑制。上述模 1 与模 2 状况可以互换。

综上所述, 系统存在四种耦合模式: 相互抑制, 相互支持, 一模被抑制另一模被支持, 一

模或双模既不被支持也不被抑制。

上述耦合模式的物理解释是粒子数竞争效应和交流斯塔克支持或抑制效应共同作用的结果。一方面，双模均使高能级布居数减少，因而相互竞争；另一方面，双模都使高能级发生交流斯塔克分裂，分别使另一模受到两个失谐。这两个失谐或者增大或者减小，增大时引起增益抑制，减小时，引起增益加强。如果一模的两个失谐均增大，交流斯塔克分裂呈现抑制效应；如果有一个失谐减小，交流斯塔克分裂则呈现支持效应。当模 1(2)导致的交流斯塔克分裂对模 2(1)起抑制作用时，模 2(1)则被抑制；当交流斯塔克分裂起支持作用时，如果粒子数抑制效应起主要作用，此模仍被抑制；如果交流斯塔克支持效应起主要作用时，此模则被支持；如果二者相互平衡，此模既不被支持也不被抑制。

4 耦合双模的稳态解

$$\begin{aligned} \text{令} \quad a_1 &= \mathcal{A}_1 - v_1/Q_1 - \theta_{12}(\mathcal{A}_2 - v_2/Q_2)/\mathcal{B}_2 \\ a_2 &= \mathcal{A}_2 - v_2/Q_2 - \theta_{21}(\mathcal{A}_1 - v_1/Q_1)/\mathcal{B}_1 \\ C &= (\theta_{12}\theta_{21})/(\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2) \end{aligned}$$

对于上述各种耦合模式，由(6)式得到双模稳态解 n_1^0 和 n_2^0 。

- 1) 当 $\mathcal{A}_1 < v_1/Q_1, \mathcal{A}_2 < v_2/Q_2$ ，则 $n_1^0 = n_2^0 = 0$ ；
- 2) 当 $\mathcal{A}_1 > v_1/Q_1, a_2 < 0$ ，则 $n_1^0 = (\mathcal{A}_1 - v_1/Q_1)/\mathcal{B}_1, n_2^0 = 0$ ；
- 3) 当 $\mathcal{A}_2 > v_2/Q_2, a_1 < 0$ ，则 $n_1^0 = 0, n_2^0 = (\mathcal{A}_2 - v_2/Q_2)/\mathcal{B}_2$ ；
- 4) 当 $a_1 > 0, a_2 > 0, C < 1$ ，则 $n_1^0 = a_1/\mathcal{B}_1(1 - C), n_2^0 = a_2/\mathcal{B}_2(1 - C)$ ；
- 5) 当 $\mathcal{A}_1 > v_1/Q_1, \mathcal{A}_2 > v_2/Q_2, C = 1$ ，则 $n_2^0 = (\mathcal{A}_1 - v_1/Q_1 - \mathcal{B}_1 n_1^0)/\theta_{12}$ ；

各种模式耦合可直观地由图 2 来描述^[1a]，横轴为 n_1 ，纵轴为 n_2 ，模 1 和模 2 的定态直线分别为 L_1 和 L_2 。

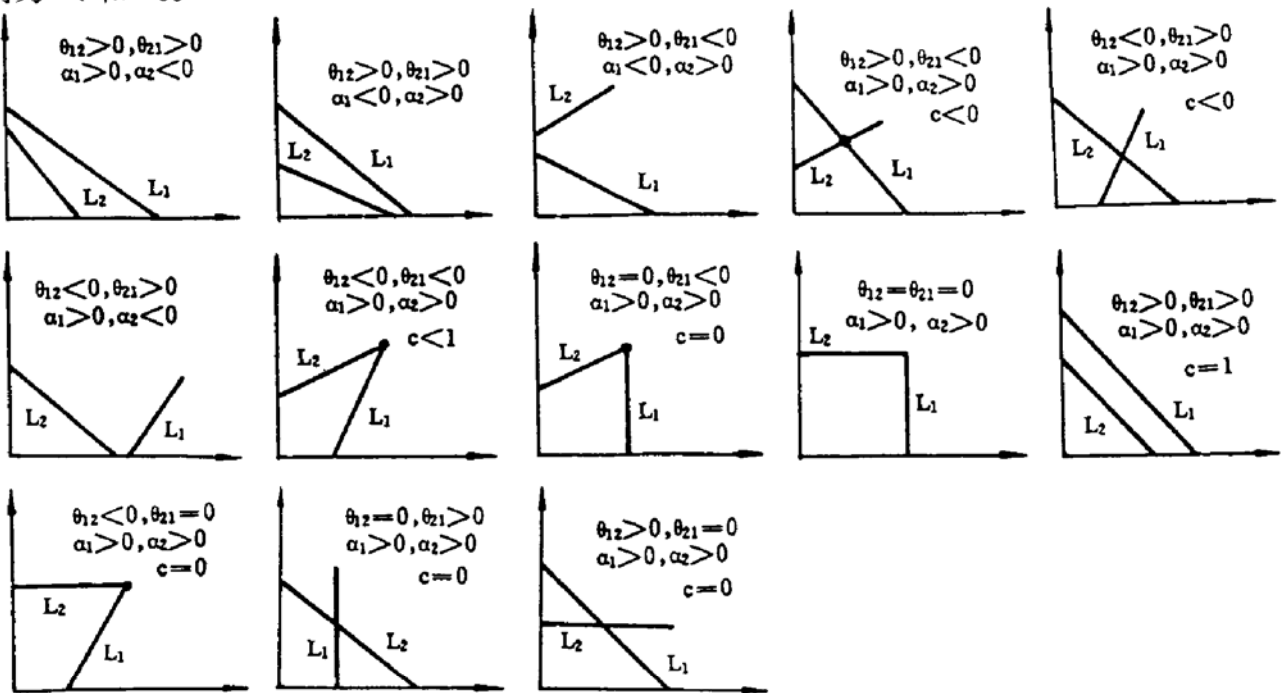


Fig. 2 Diagram for various mode couplings

结 论 本文讨论了 Λ 型双模激光近阈运行的模式耦合。耦合的特性一方面取决于失谐量, 另一方面又取决于原子初始布居, 耦合的特性不但可以呈现相互竞争和相互支持, 而且还可以呈现一模被抑制另一模被支持, 以及一模或双模既不被抑制又不被支持。

参 考 文 献

- [1] M. Sargent III, M. O. Scully, W. E. Lamb, Jr., *Laser Physics* Addison-Wesley, Reading, MA, 1974 : (a) Chapter 9; (b) Chapter 17; (c) Chapter 20
- [2] F. Najmabadi, M. Sargent III, Hopf, Theory of laser oscillation on two or more coupled transition. *Phys. Rev. A*, 1975, **12**(4) : 1553~1569
- [3] K. J. McNeil, D. F. Walls, Quantum theory of multiphoton lasers I. Systems in detailed balance. *J. Phys. A*, 1975, **8**(1) : 104~110
K. J. McNeil, D. F. Walls, Quantum theory of multiphoton lasers II. Systems in detailed balance. *J. Phys. A*, 1975, **8**(1) : 111~119
- [4] S. Singh, M. S. Zubairy, Quantum theory of a two-mode laser with coupled transitions. *Phys. Rev. A*, 1980, **21**(1) : 281~292
- [5] S. Y. Zhu, D. C. Su, Operation of a two-mode laser in a three-level atomic system with a common upper level. *Phys. Rev. A*, 1982, **25**(5) : 3169~3186
- [6] 朱诗尧, 三能级原子双模激光的非谐振运转. *光学学报*, 1983, **3**(5) : 395~399
- [7] 朱诗尧, 李瑞镛, 共振双光子放大器的理论研究. *光学学报*, 1983, **3**(8) : 678~684
- [8] Z. C. Wang, H. Haken, Theory of two-photon lasers I. *Z. Phys.*, 1984, **B55** : 361~370; II. *Z. Phys.*, 1984, **B55** : 77~82; III. *Z. Phys.*, 1984, **B56** : 83~90
- [9] S. Y. Zhu, X. S. Li, Quantum theory of a nonresonant two-mode with coupled transitions. *Phys. Rev. A*, 1987, **36**(2) : 750~759
- [10] S. Y. Zhu, M. O. Scully, Theoretical study of a two-photon double-beam laser. *Phys. Rev. A*, 1988, **38**(10) : 5433~5436

Langevin Theory of a Λ -Type Two-Mode Laser

Hu Xiangming

(Institute of Applied Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

(Received 14 June 1994; revised 29 August 1994)

Abstract Mode coupling of a Λ -type two-mode laser operating near above threshold is discussed via Langevin quantum theory. Characteristics of coupling can be have not only mutual decrease and mutual increase but also being increased of one mode and being simultaneously decreased of the other, and both not being increased and not being decreased of either or the two modes. The characteristics depend both on the detunings of the two modes and on the initial populations of three atomic levels.

Key words a Λ -type two-mode laser, mode coupling, increase, decrease.