

耦合对相对论效应下的三次谐波的影响

曾贵华 余 玮 沈百飞 徐至展

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 研究了相对论效应引起的场量的非线性对谐波辐射源的影响; 在入射光为长脉冲激光并计及各阶谐波间的耦合时, 解析研究了三次谐波的振幅、频率、相位的变化及增长与饱和特性并计算了转化率, 结果表明谐波间的耦合使幅值和转化率减少。

关键词 耦合效应, 相干三次谐波, 激光-等离子体相互作用。

随着激光技术的发展, 激光强度已达到很高的水平^[1], 在这种激光场中的电子流体的振荡具有很强的非线性和相对论效应, 这些效应诱发激光-等离子体相互作用中许多新的现象^[1~6], 如在谐波发射中产生相对论前向和后向相干谐波, 它们是对激光生成等离子体进行实验诊断的重要依据。Sprangle 等首先解析地分析了相对论谐波发射^[3, 4], 但没有考虑到耦合效应的影响, 因而导致场方程成为线性方程, 这显然是不完善的。本文在考虑耦合效应的情况下研究前向相干谐波发射。

激光与等离子体的相互作用, 可用场的矢势 A 和标势 ϕ 所满足的麦克斯韦方程、电子流体方程及等离子体的连续性方程描述。在库仑规范下, 考虑到相对论效应, 场方程为:

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2}) A = \frac{4\pi e^2 n}{m_0 c^2 \gamma} A, \quad \nabla^2 \phi = 4\pi e(n - n_0). \quad (1)$$

式中 e 为电子电量, m_0 为电子质量, n 为等离子体电子密度, n_0 为背景密度, γ 为相对论因子。为构成封闭性方程, 还需电子流体方程和连续性方程, 对冷等离子体,

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla(1 + P^2)^{1/2} = \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi - e\mathbf{V} \times \mathbf{B}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = 0. \quad (2)$$

以上用到横向动量守恒, 且 $\mathbf{P} = \mathbf{a}$, $\mathbf{V} = \mathbf{P}/\gamma$ 。作坐标变换: $\zeta = z - ct$, $r = t$, 对线偏振激光, 在准静态近似(quasistatic approximation)下, 由上述方程得到:

$$(\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \tau}) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{a} = \mathbf{S}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} = \frac{k_p^2}{2} (\frac{1 + a^2}{(1 + \phi)^2} - 1) \quad (4)$$

式中 $k_p = \omega_p/c$, $\omega_p = (4\pi e^2 n_0/m_0)^{1/2}$ 为中性背景等离子体的频率, 归一化势 $\mathbf{a} = (e/m_0 c^2) \mathbf{A}$, $\phi = (e/m_0 c^2) \phi$ 。 \mathbf{S} 的大小 $S = k_p^2 a / (1 + \phi)$, 在谐波产生中起着重要作用, 被定义为产生谐波的源

项^[3]。

文献[3~5]认为,影响谐波产生之源来自两个方面:一为相对论效应即洛仑兹因子 γ 的作用,二为密度响应 n/n_0 的影响,这两个方面在谐波产生中有一定的削弱作用^[4]。若不考虑密度响应,源为:

$$S_j = k_j^2 A_0 \cos k\zeta (1 + A_0^2 \cos k\zeta)^{-1/2}, \quad (5)$$

计及其影响,则源为:

$$S_j = k_j^2 A_0 \cos k\zeta (1 - A_0^2 \cos k\zeta + \delta n/n_0). \quad (6)$$

式中 A_0 为入射激光幅值, k 为入射激光的波数。(6)式表明相对论效应与密度响应有一定抵消作用,这是有质动力作用的结果。显然,这里没有考虑自洽场的非线性的影响。从(4)式可以看出, ϕ 是 a 的泛函,即 $\phi = \phi[a(\zeta)]$, 将其代入源项 $S_j = k_j^2 a / \{1 + \phi[a(\zeta)]\} = S_j[a(\zeta)]$, 可见源是矢势的非线性函数。文献[3]略去了此非线性性,并假定源项 S_j 仅依赖于入射激光脉冲 $a_i = A_0 \exp(ik\zeta) + C.C$, 因而导致场方程成为线性方程,这不可避免将丢失一些信息。实际上,电子流体的相对论效应导致矢势和标势的非线性,并由此而诱发各谐波间的耦合,相对论效应很强时耦合亦较强,耦合效应将改变源项,因而影响谐波辐射。例如考虑耦合时与(5)式和(6)式对应的源项分别为

$$S_{j1} = k_j^2 a (1 + a^2)^{-1/2}, \quad S_{j2} = k_j^2 a (1 - \frac{a^2}{2} + \frac{\delta n}{n_0}). \quad (7)$$

式中 a 为等离子体中的自洽场。对于长脉冲极限(即脉宽远大于等离子体波长)的入射激光,(4)式的左边趋向于零,由此得到^[3,7]

$$\phi = \pm \sqrt{1 + a^2} - 1$$

令 $a = \sum_m a_m \exp(ik_m\zeta)$, 弱相对论情形第 j 阶谐波的源项为

$$S_j = k_j^2 (a_j - \sum_{k,q} a_{j-k-q} a_k a_q) \exp(ik_j\zeta), \quad (j = 1, 2, 3 \dots) \quad (9)$$

易得三次谐波的源为

$$S_3 = k_3^2 (a_3 - \sum_{k,q} a_{3-k-q} a_k a_q) \exp(ik_3\zeta), \quad (10)$$

式中 q, k 分别取 $[-\infty, +\infty]$ 间的整数。代入(3)式得到谐波的演化方程

$$L_j a_j = \tilde{S}_j. \quad (11)$$

算子 $L_j = \frac{2}{c} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{2ik_j}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$, \tilde{S}_j 为第 j 阶谐波的源项的幅值。略去高阶耦合项,并注意到 a_3 的慢变性质,则三次谐波的演化方程为:

$$L_3 a_3 = k_3^2 (1 - \frac{3}{2} a_0^2 - 3|a_1|^2 - 3|a_2|^2) a_3 - \frac{k_3^2}{2} (a_1^3 + 6a_0 a_1 a_2 + 3a_1^* a_2^2) - \frac{3k_3^2}{2} a_3^* a_3^2 \quad (12)$$

按照文献[4]令 $a_0 = 0, a_2 = 0$, 且 $a_1 = A_0$,

$$\frac{2ik_3}{c} \frac{\partial a_3}{\partial \tau} = k_3^2 (1 - 3|a_1|^2) a_3 - \frac{k_3^2}{2} a_1^3. \quad (13)$$

(12)、(13)式说明方程中存在谐波间的耦合,解此方程得到

$$a_3 = - \frac{A_0^3}{2(1 - 3A_0^2)} [\exp(-G\tau) - 1]. \quad (14)$$

式中 $G = ck_3^2(1 - 3|A_0|^2)/6k$ 。由此表达式可进一步研究其增长和饱和特性,当 τ 很小时按时间变化的规律为

$$a_{3i} = i(k_3^2 A_0^3 / 12k) c \tau, \quad (15)$$

随时间线性增长, 但(14)表明不可能出现久期项, 增长到一定程度后会出现饱和, 即经过一失相长度 $c\tau_s$ 后将到达一个最大幅值^[3, 4]。由(14)求得饱和时间 $\tau_s = 2\pi/G$, 与之对应的饱和值和最大转化率分别为:

$$a_{3s} = A_0^3/(1 - 3A_0^2) \exp(i\pi/4), \quad \eta_1 = A_0^3/(1 - 3A_0^2)^2, \quad (15)$$

若不考虑耦合效应, 三阶谐波的幅值为:

$$\bar{a}_3 = i(k_p^2 A_0^3/12k)c\tau. \quad (16)$$

可见在线性区与考虑耦合时相同, 均随时间线性增长, 但不考虑耦合时将出现久期发散困难, 克服它需要一个人为假设^[3]或作另一种坐标变换^[6]。设 $c\tau = c\tau_s$ 时饱和, 饱和值和饱和时的最大转化率分别为:

$$\bar{a}_{3s} = [\pi A_0^3/2(1 - 3A_0^2)] \exp(i\pi/2), \quad \eta_2 = \pi^2 A_0^3/4(1 - 3A_0^2)^2 \quad (17)$$

两种情况下的最大转化率比

$$R_1 = \eta_1/\eta_2 = 4/\pi^2 \simeq 0.4 \quad (18)$$

若在坐标变换中用相速度 $V_{ph}(=c\beta_{ph}/k)$ 代群速度 V_g , 而不是如前述的用光速 c 代 V_g , 即作变换 $\zeta = z - V_{ph}t$, $\tau = t$, 这时(3)、(4)式不能适用, 由方程(1)、(2)依前述方法容易得到:

1) 不考虑耦合效应, 三次谐波的幅值为:

$$a_{3ph} = -A_0^3(1 + \phi_s)[\exp(i\delta\omega_3\tau) - 1]/16 \quad (19)$$

式中 $\delta\omega_3 = \omega_3 - \beta_{ph}ck_3$, $\omega_3 = 3\omega$, 为三次谐波的频率。

饱和值为:

$$a_{3phs} = A_0^3(1 + \phi_s)/8 \quad (20)$$

2) 考虑耦合效应, 三次谐波的幅值为:

$$a_{3phc} = \frac{c^2 k_p^2 A_0^3}{4\omega_3 \delta\omega_3 - 2k_p^2(1 - 3A_0^2)} \{ \exp(i\delta\omega_3\tau) - \exp\left[\frac{k_p^2(1 - 3A_0^2)}{2\omega_3}i\tau\right] \} \quad (21)$$

饱和值

$$a_{3phcs} = -\frac{c^2 k_p^2 A_0^3}{2\omega_3 \delta\omega_3 - k_p^2(1 - 3A_0^2 + 2_0)} \quad (22)$$

两种情形的最大转化率之比为

$$R_2 = \eta_c/\eta_n = 1/4 = 0.25 \quad (23)$$

比较(18)式和(23)式, 最大转化率比不同, 且 R_1 大于 R_2 。

以上结果表明:

1) 三次谐波幅值随时间振荡在 0 和饱和值间而不是线性增加, 因而不可能出现久期发散问题, 不考虑耦合效应的情况则不然。

2) 耦和效应导致三次谐波的幅值和转化率显著减少; 在线性区两种情形有相同的变化规律, 偏离线性区则完全不同。

3) 耦合引起谐波相移和频率变化, (14)表明相移和频率变化与入射脉冲及等离子体初始状态等因素有关。

4) 由(14)式知, 在变换 $\zeta = z - ct$, $\tau = t$ 下无饱和效应的结论^[4]是不妥的。

5) 耦合对两种变换下的饱和值及转化率等有影响。

可见在相对论向前相干谐波产生中, 各谐波间的耦合对谐波产生具有较大影响, 当入射

激光脉冲的幅值 $A \geq 1$ 时, 耦合效应更强。

参 考 文 献

- [1] G. Mourou, D. Umstadter, Development and applications of compact high-intensity lasers. *Phys. Fluids (B)*, 1992, **4**(7) : 2315~2325
- [2] P. Sprangle, E. Esary, Stimulated backscattered harmonic generation from intense laser interactions with beams and plasmas. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **67**(15) : 2021~2024
- [3] P. Sprangle, E. Esarey, A. Ting, Nonlinear theory of intense laser-plasma interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(17) : 2011~2014
- [4] E. Esarey, A. Ting, P. Sprangle *et al.*, Nonlinear analysis of relativistic harmonic generation by intense laser in plasmas. *IEEE Trans. Plasma*, 1993 **21**(1) : 95~104
- [5] J. M. Rax, N. J. Fisch, Third-harmonic generation with ultrahigh-intensity laser pulse. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **69**(5) : 772~775
- [6] W. B. Mori, C. D. Decker, W. P. Leemans, Relativistic harmonic content of nonlinear electromagnetic waves in underdense plasmas. *IEEE Trans. Plasma*, 1993, **21**(1) : 110~119
- [7] V. I. Berezhiani, S. M. Mahajan, Large amplitude localized structures in a relativistic electron-positron ion plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **73**(8) : 1110~1113

Impact of Coupling Effect to Relativistic Third Harmonic Generation

Zeng Guihua Yu Wei Shen Baifei Xu Zhizhan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

(Received 15 December 1994)

Abstract The nonlinearity of laser field induced by relativistic effect and its influence and harmonic generation are investigated. The variations of amplitude, phase and efficiency of third harmonic content are analyzed by taking into account the coupling among harmonics of different orders, the growth and saturation of third harmonic wave are also described. Results show the coupling effect can decrease the amplitude and efficiency of relativistic harmonic radiation for the long laser pulse limit.

Key words coupling effect, coherent third harmonic, laser-plasma interaction.