

带高斯镜的热透镜谐振腔的光腔特性 及动力学稳定性

夏文建 李正佳 丘军林

(华中理工大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

摘 要 建立了带高斯镜的热透镜谐振腔的光学矩阵, 分析了谐振腔的稳定性条件及腔内高斯光束的传输特征, 通过研究光腔特征参数随热透镜变化的动力学特征, 探讨了此类谐振腔的动力学稳定性。

关键词 高斯镜, 热透镜谐振腔, 动力学稳定性。

1 引 言

Casperson 和 Luman^[1]、Yariv 和 Yeh^[2] 导出了高斯孔径或镜面的 $ABCD$ 矩阵, 并用描述光束传输特征的矩阵技术处理了带高斯镜的空腔问题, 讨论了 q 参数的稳定性。随着现代镀膜技术的发展, 特别是具有高的中心反射率和高破坏阈值的高斯镜的出现, 采用高斯镜的谐振腔已用于高功率固体激光器^[3, 4]。由于高斯镜不仅改变入射光束的等相位面曲率半径, 而且使反射光束的光斑半径与入射光束的光斑半径不同, 因而改变了谐振腔的光腔特性, 同时, 激活介质的热效应使激光棒等效于一个具有可变焦距的厚透镜, 谐振腔的 G 参数将为可变参量, 导致谐振腔的光腔特性随热透镜的变化而表现为动力学变化特征。

本文从带高斯镜的热透镜谐振腔的光学矩阵出发, 分析谐振腔的光腔特征及其特征参量随热透镜改变时的变化特征, 讨论了其动力学稳定性。

2 光学矩阵分析

高斯镜的能量反射率分布为

$$R(r) = R_0 \exp[-2(r/\omega_0)^2] \quad (1)$$

式中 ω_0 为高斯镜上 R 降到 R_0 的 $1/e^2$ 时所对应的半径值, 其反射矩阵为^[1, 2]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\rho_{GRM}} - \frac{i\lambda}{\pi\omega_0^2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{\bar{\rho}_{GRM}} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 $1/\bar{\rho}_{GRM} = 1/\rho_{GRM} + i\lambda/2\pi\omega_0^2 = 1/\rho_{GRM} + ih$, $h = \lambda/2\pi\omega_0^2$, ρ_{GRM} 为高斯镜面曲率半径。为分析问题方便, 激光棒用具有可变焦距 f 的薄透镜来等效。谐振腔的几何结构参数和镜面上高

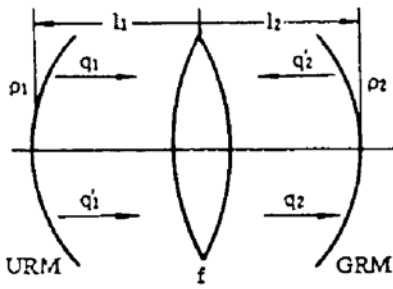


Fig. 1 Geometrical parameters and q parameters on mirrors of Gaussian resonators with thermal lensing

斯光束对应 q 参数如图 1 所示。图 1 中 l_1, l_2 为热透镜距两反射镜的距离, q_1, q_1' 和 q_2, q_2' 分别为均匀镜和高斯镜上入射光束、反射光束对应的 q 参数。由 q 参数定义 $1/q = 1/R - i\lambda/\pi\omega^2$, 与 q_1, q_1', q_2, q_2' 相对应的高斯光束等相位面曲率半径分别为 R_1, R_1', R_2, R_2' , 镜面上高斯光束光斑半径分别为 $\omega_1, \omega_1', \omega_2, \omega_2'$ 。

以均匀镜为起始参考面, 腔内元件的传输矩阵为

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - l_2/f & l_1 + l_2 - l_1 l_2/f \\ -1/f & 1 - l_1/f \end{bmatrix}$$

由于高斯镜反射矩阵中 $\bar{\rho}_{GRM}$ 为复参量, 导致谐振腔的 G 参数和 $ABCD$ 矩阵元素出现复参量 \bar{G}_2 和 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ 。将上述复参量代入均匀镜腔的 q 参数计算公式, 得

$$\frac{1}{q_1} = -\frac{1}{\rho_{URM}} \pm \frac{\sqrt{(2G_1\bar{G}_2 - 1)^2 - 1}}{2b\bar{G}_2} \quad (3)$$

其中, ρ_{URM} 为均匀镜面曲率半径, 谐振腔的 G 参数为:

$$G_1 = a - b/\rho_{URM}, \quad \bar{G}_2 = d - b/\bar{\rho}_{GRM} = d - b/\rho_{GRM} - ibh = G_2 - ibh, \quad (4)$$

为解方程(3), 式中“ \pm ”号统一取“ $-$ ”号, 同时令 $\cos(m + ni) = 2G_1\bar{G}_2 - 1$ 。则有

$$\cos m \operatorname{ch} n = 2G_1\bar{G}_2 - 1 = u, \quad \sin m \operatorname{sh} n = 2bG_1h = v,$$

$$\operatorname{ch}^2 n = (1 + u^2 + v^2)/2 + \sqrt{(1 + u^2 + v^2)^2 - 4u^2}/2.$$

得

$$\frac{1}{q_1} = -\frac{1}{\rho_{URM}} + \frac{(2G_1\bar{G}_2 - 1)G_2 \operatorname{sh}^2 n + 2G_1(bh)^2 \operatorname{ch}^2 n}{2b(G_2^2 + b^2h^2) \operatorname{ch} n \operatorname{sh} n} - i \frac{2G_1\bar{G}_2 + \operatorname{sh}^2 n}{2(G_2^2 + b^2h^2) \operatorname{ch} n \operatorname{sh} n} h \quad (5)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_2} &= -\frac{1}{\bar{\rho}_{GRM}} - \frac{\sqrt{(2G_1\bar{G}_2 - 1)^2 - 1}}{2bG_1} \\ &= -\frac{1}{\rho_2} + \frac{\operatorname{sh} n(2G_1\bar{G}_2 - 1)}{2bG_1 \operatorname{ch} n} - ih(1 + \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh} n}) \end{aligned} \quad (6)$$

由 $1/q_1 = 2/\rho_1 + 1/q_1', 1/q_2 = 2/\bar{\rho}_{GRM} + 1/q_2'$ 和方程(5)、(6)得

$$\omega_1^2 = \omega_1'^2 = \frac{4(G_2^2 + b^2h^2) \operatorname{sh} n}{\cos m + \operatorname{ch} n} \omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \left(\frac{e^{2n} - 1}{e^{2n}}\right) \omega_0^2, \quad \omega_2'^2 = (e^{2n} - 1) \omega_0^2. \quad (7)$$

腔内存在高斯光束的条件为: 方程(7)中高斯光束光斑半径 ω 为有限的实数值。

$ABCD$ 矩阵的本征值

$$\begin{aligned} \lambda &= 2G_1\bar{G}_2 - 1 - \sqrt{(2G_1\bar{G}_2 - 1)^2 - 1} \\ &= \cos(m + ni) - i \sin(m + ni) = e^* e^{-im} \end{aligned} \quad (8)$$

其绝对值为 $|\lambda| = e^*$ 。将 $|\lambda|$ 定义为高斯镜腔的放大倍数 M , 由(7)、(8)式可知, $\omega_2 = M\omega_0$, 由 q 参数的微扰稳定因子 $F_q[1]$ 的定义 $\delta(1/q) = \Delta(1/q)/F_q^2$ 及其计算公式

$$F_q = \left| \bar{A} + \frac{q}{B} \right| = \left| \frac{\bar{A} + \bar{D}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\bar{A} + \bar{D}}{2}\right)^2 - 1} \right| = |\lambda| \quad (9)$$

可知, 当 $F_q > 1$ 时, $1/q$ 的扰动 $\Delta(1/q)$ 经一个往返周期后, 将被缩小 F_q^2 倍, 此时 q 参数为稳定的, 而当 $F_q < 1$ 时, $1/q$ 的扰动 $\Delta(1/q)$ 经一个往返周期后, 将被扩大 $1/F_q^2$ 倍, 此时对应的

q 参数为非稳的。由 F_1 因子的特性及公式(7)可知：

除临界点 ($v = 0$) 外, ω_1 、 ω_2 、 ω_2' 总为正的有限实数, 腔内总可存在高斯光束, 而与 $0 < G_1 G_2 < 1$ 或 $G_1 G_2 < 0$, $G_1 G_2 > 1$ 无关。结果导致谐振腔内高斯光束在不同的方向上沿不同的路径进行传输, 初始光束 q_1 经腔内元件传输后到达高斯镜, 经高斯镜反射后, 由于存在透射损耗, 反射光束的光斑半径缩小, $\omega_2 = \omega_2'/|\lambda|$, 且以不同于 ρ_2 和 R_2 的等相位面曲率半径 R_2' 向左传输, 到达均匀镜时 $\omega_1 = \omega_1'$ 再以不同于 ρ_1 和 R_1 的等相位面曲率半径 R_1' 向左传输, 完成一个自再现周期, 如图 2 所示。

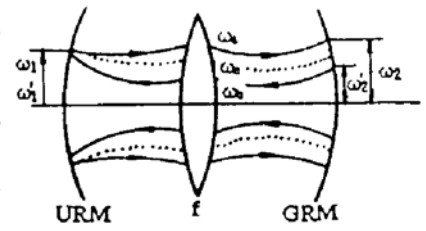


Fig. 2 Gaussian beam transmission profile inside Gaussian resonators with thermal lensing

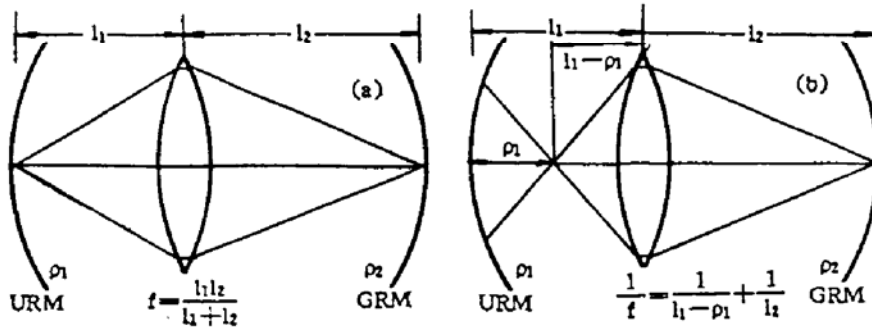


Fig. 3 Spot source profile of spherical wave profile inside Gaussian resonators with thermal lensing

在临界点处 $|\lambda| = 1$ ($v = 0, u^2 = 1$), $b = 0$ 或 $G_1 = 0$, 此时有 $\omega_1 = \omega_1' = 0$, $\omega_2 = \omega_2' = 0$ ($b = 0$), 或 $\omega_1 = \omega_1' = \infty$, $\omega_2 = \omega_2' = 0$ ($G_1 = 0$), 腔内存在点光束, 分别位于 G 参数稳定图中坐标轴 $G_1 = 0$ 和双曲线 $G_1 G_2 = 1$ 在第三象限的一支上。

当 $b = 0$ 时, 有 $1/f = 1/l_1 + 1/l_2$, 点源位置分别在两反射镜上, 如图 3(a) 所示, 当 $G_1 = 0$ 时, 有 $1/f = 1/(l_2 - \rho_1) + 1/l_2$, 点源位置分别在高斯镜上和距离反射镜 1 为 ρ_1 处, 如图 3(b) 所示。由上面分析可知, 在临界点处, 总有一点源位置在高斯镜上, 这将会导致过高的内腔功率密度而损坏高斯镜, 因而在谐振腔的设计中谐振腔在整个经过屈光度范围内应尽量避免越过 G 参数稳定图中的临界点(即点光束区)。

3 光腔特征参量及光腔动力学稳定性分析

TEM₀₀ 模经高斯镜耦合输出后, 其透射损耗

$$L_{00} = \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} I_0 \exp \left[-2 \left(\frac{r}{\omega_2} \right)^2 \right] \{ 1 - R_0 \exp \left[-2 \left(\frac{r}{\omega_0} \right)^2 \right] \} r dr d\theta}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} E_0 \exp \left[-2 \left(\frac{r}{\omega_2} \right)^2 \right] r dr d\theta} = 1 - \frac{R_0}{M^2} \quad (10)$$

其中 $I_0 \exp(-2r^2/\omega_2^2)$ 为入射到高斯镜上的能量强度分布, I_0 为中心强度值。 R_0/M^2 为能量反射率。

同理 TEM₀₁ 模的透射损耗

$$L_{01} = \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta I_0 \exp \left[-2 \left(\frac{r}{\omega_2} \right)^2 \right] [1 - R(r)] r^3 dr d\theta}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta I_0 \exp \left[-2 \left(\frac{r}{\omega_2} \right)^2 \right] r^3 dr d\theta} = 1 - \frac{R_0}{M^4} \quad (11)$$

现在定义归一化模损耗间隔

$$\delta_{\mu} = \frac{L_{\mu} - L_{00}}{R_0} = \frac{1}{M^2} [1 - (1/M^{2(2\mu-1)})] \quad (12)$$

对于 TEM_{01} 模

$$\delta_{01} = \frac{L_{01} - L_{00}}{R_0} = \frac{1}{M^2} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \quad (13)$$

从 $\frac{d\delta}{dM} = 0$ 得到对于 TEM_{pl} 模的归一化能量损耗间隔在 $M = (2p + l + 1)^{1/2(2p+l)}$ 处取得最大值,

对应于 TEM_{01} 模, $M = \sqrt{2}$, TEM_{02} 模, $M = 3^{1/4}$ 。由于放大倍数表征了谐振腔的损耗特性和选模特性, 所以放大倍数是最主要的参量之一, 另外, 再定义一个等效费涅尔数 F_{eq} ,

$$F_{eq} = \frac{\omega_0^2}{\lambda b} \quad (14)$$

式中 b 为等效腔长 $b = l_1 + l_2 - l_1 l_2 / f$ 。在几何光学近似条件下 ($F_{eq} \gg 1$), 由公式(8)知, 放大倍数 M 决定于谐振腔的几何参量及高斯镜的特征参量 ω_0 , 见图 4。

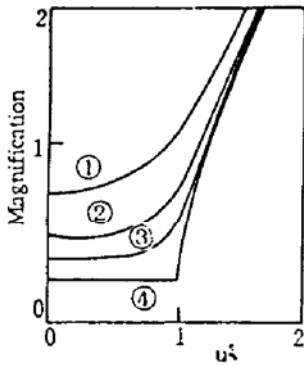


Fig. 4 The dependence of Magnification on u^2 and v

- ① $v = 0.5$, ② $v = 0.25$, ③ $v = 0.125$,
④ $v = 0.0$

1) 当 $v = 2bG_1h$ 比较小 ($\ll 1$) 时, 放大倍数 M 主要由 $u^2 = (2G_1G_2 - 1)^2$ 决定, 当 $u^2 < 1$ 时, M 的数值较低, 且变化缓慢, 称之为低 M 区, 当 $u^2 > 1$ 时, M 的数值升高迅速, 且迅速接近于均匀镜非稳腔的放大倍数, 称之为高 M 区。

2) 当 v 逐渐增加时, M 曲线上升, 且随着 v 的增加, 高 M 区向 $u^2 < 1$ 区域内移动。

由于 $u^2 < 1$ 对应着 $0 < G_1G_2 < 1$, 而 $u^2 > 1$ 对应着 $G_1G_2 < 0$ 或 $G_1G_2 > 1$, 将前者称为高斯镜稳定腔, 后者称为高斯镜非稳腔。对于高斯镜稳定腔 [$(2G_1G_2 - 1)^2 \leq 1$], 其放大倍数 M 相对较低, 适合于具有低的小信号增益的连续激光器工作, 而对于高斯镜非稳腔 [$(2G_1G_2 - 1)^2 \geq 1$], 其放大倍数相对较高, 适合于具有高的小信号增益的脉冲激光器运转。

当谐振腔在 G 参数稳定区 ($0 < G_1G_2 < 1$) 运行而进入非稳区, 且经过坐标轴 $G_1 = 0$ 或双曲线 $G_1G_2 = 1$ 在第三象限的一支时, 其放大倍数将经过一个临界点 $M = 1$, 而当其经过坐标轴 $G_2 = 0$ 或双曲线 $G_1G_2 = 1$ 在第一象限的一支时, 其放大倍数将经过一个从低 M 区到高 M 区的剧烈变化过渡区。当谐振腔在 G 参数非稳区 ($G_1G_2 < 0$ 或 $G_1G_2 > 1$) 运行而进入稳定区时, 反之亦然。

高斯镜谐振腔的腔内光束特征由谐振腔的 G 参数和高斯镜的特征参量 ω_0 共同决定, 因此, 谐振腔的有效模体积不仅与 G 参数有关, 而且与 ω_0 有关。在给定 G 参数的条件下, 有效模体积将随 ω_0 的改变而变化。考虑高斯镜谐振腔中高斯光束在腔内的传输特征, 从有效模体积的定义出发, 定义一个归一化有效模体积因子 k

$$k = (\omega_a^2 + \omega_b^2) / 2\omega_c^2 \quad (15)$$

式中 ω_a 、 ω_b 分别为高斯镜谐振腔中左右两条光路传输到热透镜上的光斑半径, ω_c 为均匀镜谐振腔中热透镜上的光斑半径。显然 k 仅对于高斯镜稳定腔有意义, 原因在于均匀镜非稳腔中光束特征为球面波, ω_c 无实数解, 但稳定腔中的 k 足以说明问题。图 5、图 6 中给出了对称平-平腔和对称共焦腔中, 对应于不同的高斯镜特征参量 ω_0 、谐振腔的放大倍数 M 和归一化等效模体积因子 k 随热透镜焦距 (图中横坐标为屈光度 $D = 1/f$) 的变化关系曲线。两图中, 在 G 参数稳定区域, k 参数均大于 1.0, 这说明高斯镜谐振腔可增大其有效模体积, 对于高斯镜稳定腔, 小的 ω_0 值对应着较高的 k 参数, 且 ω_0 越大, k 参数越接近于 1.0, 高斯镜谐振腔中的两

条光路将愈接近于均匀镜谐振腔中的高斯光束传输光路。因而对于实际运转的连续激光器，由于 k 因子与高斯镜的特征参量 ω_0 存在相对的矛盾关系，也即由公式(5)、(6) 决定的高斯镜面上的高斯光束光斑尺寸不能十分有效地增加，因此高斯镜谐振腔可部分地增大其有效模体积。对于高斯镜非稳腔，即使在大的 ω_0 值时，其放大倍数 M 亦较高，从公式(5)~(7)可知，两镜面上的高斯光斑半径可大大增加，因而对于高斯镜非稳腔，可更有效地扩大基模有效模体积，有利于提高低阶模式的输出功率。

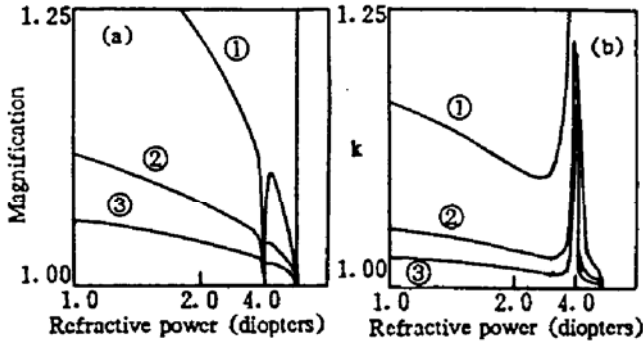


Fig. 5 (a) magnification and (b) normalized factor k of effective mode volume vs varying refractive power of thermal lens in symmetrical p-p resonators with (1) $\omega_0 = 0.6$, (2) $\omega_0 = 1.0$, (3) $\omega_0 = 1.4$ ($l_1 = l_2 = 250$ mm)

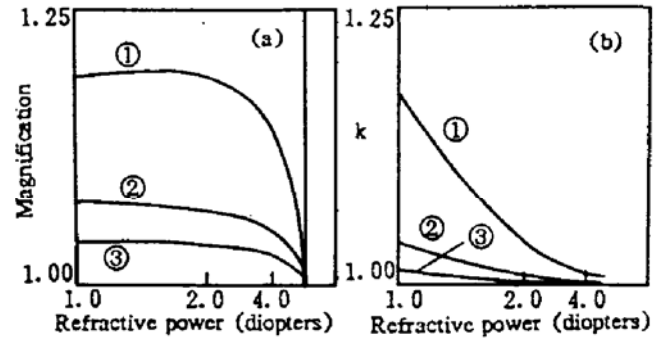


Fig. 6 (a) magnification and (b) normalized factor of effective mode volume vs varying refractive power of thermal lens in symmetrical confocal resonator with (1) $\omega_0 = 0.6$, (2) $\omega_0 = 1.0$, (3) $\omega_0 = 1.4$ ($l_1 = l_2 = 250$ mm)

对于具有可变焦距 f 的高斯镜腔，其 G 参数之间关系为 $G_2 + \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1(l_2 - \rho_2)\rho_1}{l_2(l_1 - \rho_1)\rho_2} [G_1 + \frac{l_2}{l_1}]$,

直线斜率为 $\frac{l_1(l_2 - \rho_2)\rho_1}{l_2(l_1 - \rho_1)\rho_2}$ ，起点位置 ($f = \infty$) 为 $G_1 = 1 - \frac{l_1 + l_2}{\rho_1}$, $G_2 = 1 - \frac{l_1 + l_2}{\rho_2}$ 。

1) 平-平腔 ($\rho_1 = \rho_2 = \infty$)

G 参数之间关系为， $G_2 = l_1 G_1 / l_2 + 1 - l_1 / l_2$ ，直线斜率为 l_1 / l_2 ，起点位置为 $G_1 = G_2 = 1$ ，以薄透镜在腔中的位置作参量，其 G 参数的典型运动轨迹如图 7(a) 所示，其对应的谐振腔的放大倍数如图 7(b) 所示。从图中可知，当 $l_1 \neq l_2$ 时， G 参数运动轨迹将从起点位置开始。经过一个稳定区和一个非稳区，再进入第二个稳定区和第二个非稳区，对应于两个非稳区，放大倍数表现为有两个高 M 区(直线 ①, ③)，当 $l_1 = l_2$ 时，仅经过一个临界点 ($G_1 = 0, G_2 = 0$)，放大倍数表现为仅有一个高 M 区(直线 ②)。

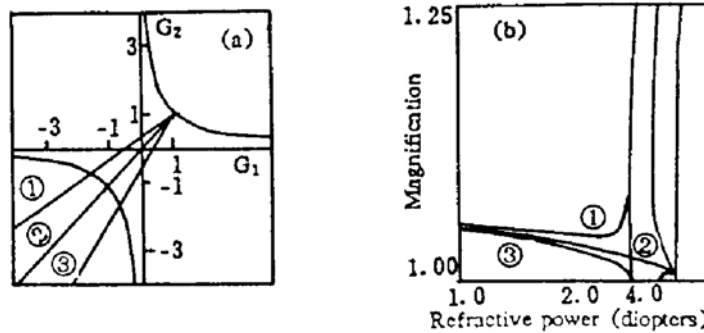


Fig. 7 (a) G parameters and (b) magnification vs refractive power of thermal lens in plane-plane resonators for (1) $l_1 > l_2$, (2) $l_1 = l_2$, (3) $l_1 < l_2$

2) 共焦腔 ($\rho_1 = \rho_2 = l_1 + l_2$)

G 参数之间关系为, $G_2 = l_1^2 G_1 / l_2^2$, 直线斜率为 l_1^2 / l_2^2 , 起点位置为 $G_1 = G_2 = 0$ 。以薄透镜在腔中的位置作参量, 其 G 参数的典型运动轨迹如图 8(a) 所示, 其对应的谐振腔的放大倍数如图 8(b) 所示。从图中可知, G 参数运动轨迹将从起点位置开始。经过一个稳定区后, 进入一个非稳区, 放大倍数表现为仅有一个高 M 区。

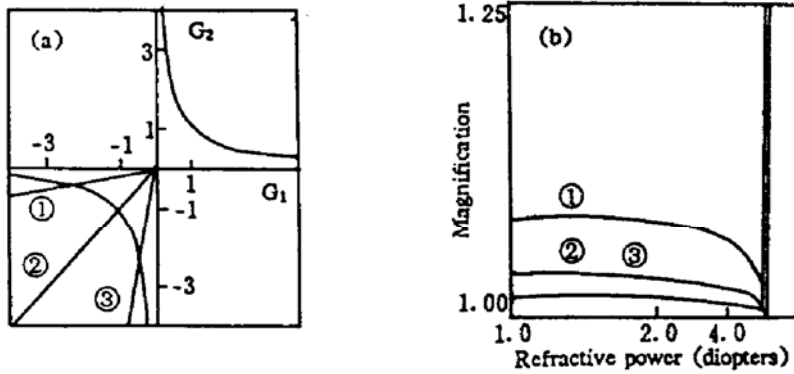


Fig. 8 (a) G parameters and (b) magnification vs refractive power of thermal lens in plane-plane resonators for (1) $l_1 > l_2$, (2) $l_1 = l_2$, (3) $l_1 < l_2$

3) 共心腔 ($\rho_1 = \rho_2 = (l_1 + l_2) / 2$)

G 参数之间关系为

$$\begin{cases} G_2 = -l_1 G_1 / l_2 - l_1 / l_2 + 1 & (l_1 \neq l_2) \\ G_1 = G_2 = -1 & (l_1 = l_2) \end{cases}$$

直线斜率为 $-l_1 / l_2$, 起点位置为 $G_1 = G_2 = -1$, 以薄透镜在腔中的位置作参量, 其 G 参数的典型运动轨迹如图 9(a) 所示, 其对应的谐振腔的放大倍数如图 9(b) 所示。

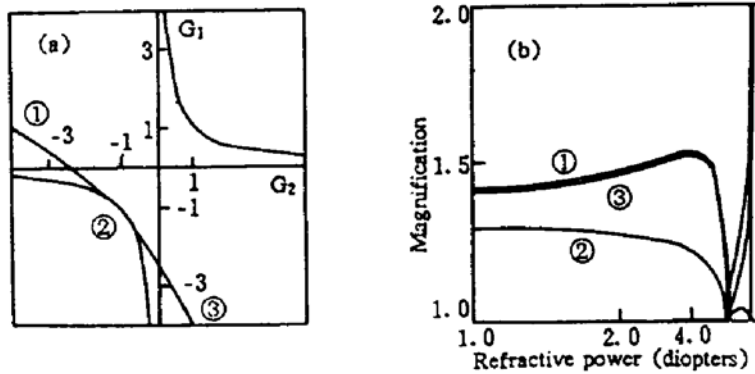


Fig. 9 (a) G parameters and (b) magnification vs refractive power of thermal lens in concentric resonators for (1) $l_1 > l_2$, (2) $l_1 = l_2$, (3) $l_1 < l_2$

小 结 本文对带高斯镜的热透镜谐振腔的光学矩阵的分析表明, 除几个临界点外, 腔内总可存在高斯光束, 而与 $0 < G_1 G_2 < 1$ 或 $G_1 G_2 < 0$ 、 $G_1 G_2 > 1$ 无关, 将前者称为高斯镜稳定腔, 后者称为高斯镜非稳腔。采用高斯镜后, 由于不同的横模具有不同的透射损耗, 且模次越高, 损耗越大, 高次模的振荡将受到抑制, 因而高斯镜谐振腔具有选模特性。对于高斯镜稳定腔, 可部分地增加有效模体积, 对于高斯镜非稳腔, 可更有效地增加有效模体积。高斯镜谐振腔的损耗特性和选模特性主要由放大倍数 M 表征, 高斯镜稳定腔 ($0 < G_1 G_2 < 1$) 的放大倍数 M 相对较低, 取对称平-平腔型或不对称共焦腔型 ($l_1 \neq l_2$) 可具有大的动力学稳定运行范围, 高

斯镜非稳腔($G_1G_2 < 0$, 或 $G_1G_2 > 1$)的放大倍数相对较高, 取共心腔型或近共心腔型可具有大的动力学稳定运行范围。

参 考 文 献

- [1] L. W. Casperson, S. D. Lunman, Gaussian modes in high loss laser resonators. *Appl. Opt.*, 1975, 14(5): 1193~1199
- [2] A. Yariv, P. Yeh, Confinement and stability in optical resonators employing mirrors with Gaussian reflectivity tapers. *Opt. Commun.*, 1975, 13(4): 370~374
- [3] N. Hogdson, G. Bostanjoglo, The near-concentric unstable resonator (NCUR)——an improved resonator design for high power solid state lasers. *Opt. Commun.*, 1993, 99(1): 75~81
- [4] V. Magni, S. Desilvestri, Lie Jia Qian *et al.*, Rod-imaging supergaussian unstable resonator for high power solid-state lasers. *Opt. Commun.*, 1992, 94(1~3): 87~91

Optical Characteristics and Dynamic Stability of Gaussian Resonators with Thermal Lensing

Xia Wenjian Li Zhengjia Qiu Junlin

(Huazhong University of Science & Technology, National Laser Technology Laboratory, Wuhan 430074)

(Received 24 July 1994; revised 30 September 1994)

Abstract By analysing the optical matrix of Gaussian resonators with thermal lensing, we investigate the confinement condition and the transmission characteristics of Gaussian beam inside Gaussian resonators. The dynamic stability of Gaussian resonators is evaluated by studying the dependence of dynamically changing parameters on varying refractive power of thermal lens.

Key words Gaussian Mirrors, thermal lensing resonators, dynamic stability.