

范德波尔振子方程的格林函数解

凌寅生

凌 天

(苏州大学物理系, 苏州 215006) (中国科技大学物理系, 合肥 230026)

摘 要 应用传播子方法, 求解福克-普朗克(Fokker-Planck)方程。应用局域谐振子势近似, 计算格林(Green)函数。计算范德波尔(Van der Pol)振子方程的瞬态解。

关键词 福克-普朗克方程, 传播子, 局域谐振子势近似, 范德波尔振子方程。

1 引 言

研究光学中的噪声通常采用福克-普朗克方程。福克-普朗克方程为线性偏微分方程, 可以应用求解线性方程的许多技巧, 比如格林函数方法等。一般福克-普朗克方程的格林函数也很难求。近年来研究原子核裂变的扩散过程时提出的局域谐振子势近似方法, 对计算克喇末(Kramers)方程的格林函数是一种很好的近似方法^[1~3]。克喇末方程是福克-普朗克方程一个特例, 所以作者认为局域谐振子势近似方法, 也可以用来计算激光福克-普朗克方程的格林函数。本文以计算与范德波尔振子方程相应的福克-普朗克方程(简称为范德波尔振子方程)为例, 介绍这种方法。Risken用本征函数法求解过该方程的瞬态解^[4]。作者采用数值计算, 结果可以达到他取10项本征函数作展开的精度。在原点附近的结果更加精确。本文首先以一维福克-普朗克方程为例, 介绍局域谐振子势近似方法。然后应用局域谐振子势近似方法, 计算轴对称情形下范德波尔振子方程的瞬态解, 并且具体计算不同光泵参数情形下平均光子数随时间的演化。虽然仅讨论了白噪声过程, 但不难把所介绍的方法, 推广应用于有色噪声过程。

2 福克-普朗克方程的传播子解

在大阻尼情形下, 一维布朗运动的密度函数 $P(x, t)$ 服从下列福克-普朗克方程^[4]。

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\gamma m} \frac{\partial}{\partial x} [V'(x)P(x, t)] + \frac{kT}{\gamma m} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (1)$$

其中 γ 为阻尼系数, m 为粒子质量, $V(x)$ 为作用在粒子上的势, k 为玻耳兹曼常数, T 为热库温度。本文只讨论 $(-\infty, +\infty)$ 区间上的科希(Cauchy)问题。对(1)式科希问题的解为:

$$P(x, t) = \hat{U}(t) P(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t; \xi, 0) P(\xi, 0) d\xi, \quad (2)$$

式中 $P(x, 0)$ 为初始分布, $\hat{U}(t)$ 为演化算子, $K(x, t; \xi, 0)$ 为格林函数或称为传播子。对于一般的势, $K(x, t; \xi, 0)$ 的解析式很难写出。当 $V(x) = Ax^2 + Bx + C$ 时, 可以求出^[5]:

$$K(x, t; \xi, 0) = \sqrt{\frac{A}{\pi kT[1 - \exp(-4At/\gamma m)]}} \exp \left\{ -\frac{A}{kT[1 - \exp(-4At/\gamma m)]} \left[x + \frac{B}{2} \frac{1 - \exp(-2At/\gamma m)}{A} - \xi \exp(-2At/\gamma m) \right]^2 \right\}. \quad (3)$$

对于一般的势, 可以将 $P(x, t)$ 写成

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \hat{U}(t_n - t_{n-1}) \hat{U}(t_{n-1} - t_{n-2}) \cdots \hat{U}(t_1 - t_0) P(x, 0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{n-1} K(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{n-2} K(x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}) \\ &\quad \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 K(x_1, t_1; x_0, t_0) P(x_0, t_0), \end{aligned} \quad (4)$$

这里, $x_n = x, t_n = t, t_0 = 0$ 。传播子 $K(x, t; x_0, t_0)$ 服从:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{\gamma m} \frac{\partial}{\partial x} [V'(x)K] + \frac{kT}{\gamma m} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \quad K(x, t; x_0, t_0)|_{t=t_0} = \delta(x - x_0). \quad (5)$$

当 (t_0, t) 不大时, 扰动主要集中在源点 x_0 附近, 可以用源点附近的谐振子势近似代替真实势

$$V(x) \approx V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + (1/2)V''(x_0)(x - x_0)^2, \quad (6)$$

并忽略边界条件的影响。于是(4)式中的每一个传播子 $K(x_{i+1}, t_{i+1}; x_i, t_i)$ 都可以近似地用(3)式表出。具体计算时, 可以用下列递推公式

$$P(x_{i+1}, t_{i+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i K(x_{i+1}, t_{i+1}; x_i, t_i) P(x_i, t_i). \quad (7)$$

上式求传播子时作了局域谐振子势近似。故这种求格林函数的方法称局域谐振子近似法。

3 范德波尔振子方程的传播子解

在极坐标下, 单模激光辐射场的 P 表示 $P(r, \varphi, t)$ 服从范德波尔振子方程^[4,6]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r^2(r^2 - g)P] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2}, \quad (8)$$

式中 g 为光泵参数。在轴对称情形, $(\partial P/\partial \varphi) = 0$ 。令 $r = \exp x, (-\infty < x < +\infty)$, $P(r, t)rdr = W(x, t)dx$ 。可以证明 $W(x, t) = r^2 P(r, t)$ 满足:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\exp(2x) - g]W + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp(-2x)W. \quad (9)$$

Risken 证明, 只要 $|t - t_0| \ll 1$, 计算格林函数 $K(x, t; x_0, t_0)$ 时, 可考虑下列近似方程^[4]:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [(\exp(2x) - g)K] + \exp(-2x_0) \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \quad (10)$$

这时可以应用上一节介绍的局域谐振子势近似方法。图 1 给出了初始分布为

$$P(r, 0) = \frac{g}{\exp(g/5) - 1} \exp \left[-\frac{g}{2[\exp(g/5) - 1]} r^2 \right] \quad (11)$$

时, $W(x, t) = r^2 P(r, t)$ 时间演化的规律; 图 2 给出了 $g = 4, 6, 8, 10$ 时, 平均光子数 $\langle n \rangle$ 的

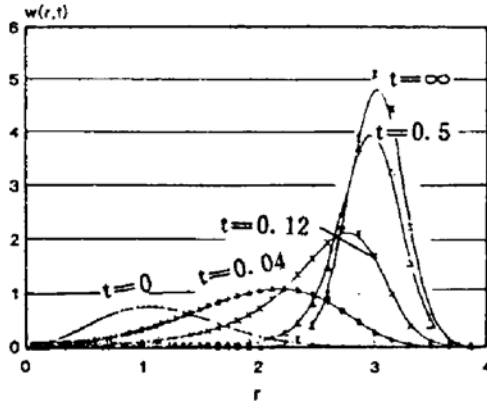


Fig. 1

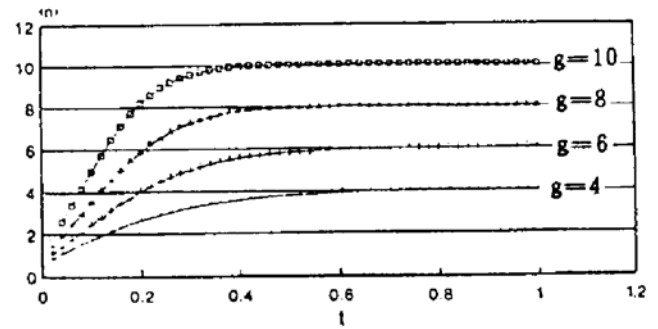


Fig. 2

时间演化规律。平均光子数的计算公式为

$$\langle n \rangle = \langle a^- a \rangle = \int_0^{+\infty} r^3 P(r, t) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2x) W(x, t) dx. \quad (12)$$

在计算平均光子数 $\langle n \rangle$ 时, 对几率进行了归一:

$$\langle n \rangle = \int_a^b \exp(2x) W(x, t) dx / \int_a^b W(x, t) dx. \quad (13)$$

从图中可以清楚地看出到达稳态的时间随光泵参数 g 的增大而减小的规律。

参 考 文 献

- [1] F. Scheuler, H. Hofmann *Nucl. Phys. (A)*, 1983, **394A**: 477~500
- [2] 冯仁发, 吴锡真, 卓益忠, 裂变系统扩散过程的研究. *原子核物理*. 1988, **10**(1): 16~22
- [3] 顾建中, 凌寅生, 从始态到准稳态过程的数字描述. *高能物理与核物理*. 1993, **17**(9): 835~837
- [4] H. Risken, *The Fokker-Planck equation*, 2nd. Ed, Berlin, Springer, 1984
- [5] Fritz Wolf, Lie algebraic solutions of linear Fokker-Planck equations. *J. Math. Phys.*, 1988, **29**(2): 305~307
- [6] W. 路易塞尔, 辐射的量子统计性质. 陈水, 于熙令译, 北京, 科学出版社, 1982

The Green Function Solution of Van Der Pol Equation

Ling Yinsheng

(Physics Department, Suzhou University, Suzhou 215006)

Ling Tian

(Physics Department, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

(Received 9 September 1993; revised 29 January 1994)

Abstract The Fokker-Planck equation is solved by using the propagator method. The Green function is calculated by using the local harmonic approximation method. The paper also discusses the applications in the quantum optics.

Key words Fokker-Planck equation, propagator, the local harmonic approximation method, Van der Pol equation.