

正色散克尔介质中光脉冲的传输*

周国生 李建庆 宋向阳
朱力力 王 勇 李学农
(山西大学物理系, 太原 030006)

摘 要 综合考虑了在2+1维正色散介质中克尔效应衍射、色散对光脉冲传输的影响, 得到了脉宽、束宽传输的一般规律, 并以高斯光束为例用数值法近似讨论了耦合强度、初始脉宽、初始啁啾对自聚焦及自相位调制自脉宽压缩的影响。

关键词 脉宽, 束宽, 自聚焦, 啁啾。

1 引 言

光脉冲在负色散克尔介质中的传输问题, 特别是(1+1)维(t 和 z 方向)问题, 已作过大量讨论, 这类问题由非线性薛定谔方程描述, 由此获得孤子解。对于(2+1)维(t, x 和 z 方向)问题, 也有相应的近似解^[1]。

实际上, 大部分克尔介质对于可见光脉冲, 处于正色散区域, 例如, 可见超短光脉冲在一般介质中传输, 又如, 在克尔镜锁模的兰宝色激光腔中的介质, 就处于这一工作状态。在超短脉冲的情况下, 空域的衍射、时域的正色散以及非线性克尔效应都对光脉冲的传输产生影响。对此作系统的研究, 有利于较深入地分析超短脉冲的传输特性及克尔镜锁模腔特性, 国外在1992年开始对这问题作了数值研究^[2,3]。

本文以变分原理对光脉冲的传输作一般性的研究, 其结果可用于任何波形式的输入光脉冲, 并用自相似假定, 设传输脉冲为高斯形, 研究在传输过程中脉宽、束宽及相位随传输距离的变化。为简单起见, 只研究 x, t 和 z 坐标(2+1)维下的特性, 这相当于在 y 方向光斑尺寸特大, 在这方向上, 物理量不随传输距离变化, 因而对其他坐标方向也没有影响。

2 光脉冲传输的一般特性

在运动坐标中光场满足下列方程^[1]

$$i \frac{\partial E}{\partial z'} - \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x'^2} + \frac{n_2 \omega_0}{c} |E|^2 E = 0, \quad (1)$$

* 国家自然科学基金资助课题。

收稿日期: 1993年12月31日

式中 $k_0 = n_0 \omega_0 / c$, $k_2 = \mathcal{F}k / \partial \omega^2 |_{\omega = \omega_0}$, $k_2 > 0$ 代表正色散, $n = n_0 + n_2 |E|^2$, n_2 是非线性折射率, $t' = t'' - z/v_g$. 对方程(1)作如下变换:

$$z = k_0 z', \quad x = k_0 x', \quad t = \sqrt{k_0 / |k_2|} t', \quad \psi = \sqrt{n_2 \omega_0 / c k_0} E,$$

得(2+1)维的具有普遍性的无量纲方程:

$$i \psi_x + (\psi_{xx} - \psi_u) / 2 + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (2)$$

设 $\psi = A(x, t, z) \exp [i\varphi(x, t, z)]$, 其中 A 和 φ 是实函数, 由此可得在传输过程中的光强(I)守恒律, 准粒子正则动量(\mathcal{D})守恒律及准粒子总能量(H)守恒律,

$$I = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi \psi^* dx dt = \iint_{-\infty}^{\infty} A^2 dx dt, \quad \mathcal{D} = \iint_{-\infty}^{\infty} p dx dt, \quad (3)$$

$$p = (i/2) [(\psi \psi_x^* - \psi^* \psi_x) x + (\psi \psi_t^* - \psi^* \psi_t) t] = A^2 (\varphi_x x + \varphi_t t), \quad (4)$$

$$H = -\frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\psi_x \psi_x^* - \psi_t \psi_t^* - \psi^* \psi^2) dx dt, \quad (5)$$

式中 x 和 t 代表这两方向的单位矢量。(2)式乘以 ψ^* , 加上(2)式的共轭乘以 ψ , 再乘以任意函数 $f(x, t, z)$, 并定义 $\langle f \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \psi^* f \psi dx dt / I$, 可得:

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle f \rangle = \langle f_z \rangle + \frac{i}{2I} \int (\psi \psi_x^* - \psi^* \psi_x) f_x dx dt - \frac{i}{2I} \int (\psi \psi_t^* - \psi^* \psi_t) f_t dx dt. \quad (6)$$

同样可以证明:

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle x^2 \rangle = n \iint_{-\infty}^{\infty} A^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} x^{2-1} dx dt, \quad \frac{\partial}{\partial z} \langle t^2 \rangle = -n \iint_{-\infty}^{\infty} A^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} t^{2-1} dx dt. \quad (7)$$

分别令 $f = x$ 和 $f = t$, 可得

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle x \rangle = \frac{i}{2I} \iint_{-\infty}^{\infty} (\psi \psi_x^* - \psi^* \psi_x) dx dt = \frac{1}{I} (\mathcal{D})_x = \frac{1}{I} (\mathcal{D}_0)_x, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle t \rangle = -\frac{1}{I} (\mathcal{D})_t = -\frac{1}{I} (\mathcal{D}_0)_t. \quad (9)$$

这里 $(\mathcal{D})_x$ 和 $(\mathcal{D})_t$ 分别代表 \mathcal{D} 在 x 和 t 方向的分量, 由于 \mathcal{D} 在沿 z 传播时守恒, 所以可用 $z = 0$ 处的值 $(\mathcal{D}_0)_x$, $(\mathcal{D}_0)_t$ 来表示。 $\langle x \rangle$ 是光束的空域质心位置。若在 $z = 0$ 处, $(\mathcal{D}_0)_x = 0$ 或 $\partial \varphi / \partial x = 0$, 则 $d\langle x \rangle / dz = 0$, 光束质心将保持不变。同样, 若在 $z = 0$ 处 $(\mathcal{D}_0)_t = 0$ 或 $\partial \varphi / \partial t = 0$, 则 $\partial \langle t \rangle / \partial z = 0$, 在光脉冲传播过程中时域质心将保持不变。若在 $z = 0$ 处光脉冲的时域波形对称, 则传播过程中波形将始终保持对称。分别令 $f = x^2$ 和 $f = t^2$ 可得:

$$\frac{\mathcal{F}}{\partial z^2} \langle x^2 \rangle = \frac{2}{I} \iint (\psi_x \psi_x^* - \frac{1}{2} \psi^* \psi^2) dx dt, \quad \frac{\mathcal{F}}{\partial z^2} \langle t^2 \rangle = \frac{2}{I} \iint (\psi_t \psi_t^* + \frac{1}{2} \psi^* \psi^2) dx dt. \quad (10)$$

由(10)式可见, 当非线性效应大于衍射效应时, $\mathcal{F} \langle x^2 \rangle / \partial z^2 > 0$, 可能产生自聚焦效应, 由(10)式可见, $\mathcal{F} \langle t^2 \rangle / \partial z^2$ 恒大于零。两式相加和相减, 可得:

$$\frac{\mathcal{F}}{\partial z^2} \langle t^2 + x^2 \rangle = \frac{2}{I} \iint (\psi_x \psi_x^* + \psi_t \psi_t^*) dx dt, \quad \frac{\mathcal{F}}{\partial z^2} \langle t^2 - x^2 \rangle = 4H/I. \quad (11)$$

从长距离看, $\langle t^2 + x^2 \rangle$ 将随距离增大而增大。积分后(11)式可得:

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle t^2 - x^2 \rangle = \frac{4H}{I} z + \frac{\partial \langle t^2 - x^2 \rangle_0}{\partial z}, \quad \langle t^2 - x^2 \rangle = \frac{2H}{I} z^2 + \frac{\partial \langle t^2 - x^2 \rangle_0}{\partial z} z + \langle t^2 - x^2 \rangle_0, \quad (12)$$

其中 $\langle t^2 - x^2 \rangle_0$ 代表 $z = 0$ 处的值, $\langle t^2 \rangle$ 和 $\langle x^2 \rangle$ 分别代表 t 和 x 方向的二次矩, 也分别代表脉宽及束宽。由(11)式可见, 设 $\frac{\partial \langle t^2 - x^2 \rangle_0}{\partial z} = 0$, 则当 $H = 0$ 时, $\langle t^2 - x^2 \rangle$ 将不变, 即 $\langle t^2 \rangle - \langle t^2 \rangle_0 = \langle x^2 \rangle - \langle x^2 \rangle_0$, 脉宽的相对变化等于束宽的相对变化。当 $H > 0$, $\langle t^2 - x^2 \rangle$ 将随传播距离增大而变大。当 $H < 0$, $\langle t^2 - x^2 \rangle$ 将随距离增长而变小, 经过零而呈负值。

以上的讨论没有对输入及传输的脉冲波形作任何假定, 因此结果适用于任何波形, 即使以后波形有分裂。特别是(12)式, 可用以检验正色散克尔介质中传输问题数值解的正确性。

3 高斯光束在正色散克尔介质中的传输

设输入光束由 $\psi_0 = B_0 \exp(-x^2/W_0^2 + iq_0x^2 - t^2/T_0^2 + ib_0t^2)$ 表示, 传输过程中光波形不变,

$$\psi = B(z) \exp[-x^2/W^2(z) + iq(z)x^2 - t^2/T^2(z) + ib(z)t^2]. \quad (13)$$

这自相似假定, 对于能量不太高或传输距离不特别长是正确的。由此可得 $\langle t^2 \rangle = T^2/4$, $\langle x^2 \rangle = W^2/4$, 代入(3)式, 可得光强为:

$$I = (\pi/2) |B|^2 WT. \quad (14)$$

代入(8)、(9)式可分别得

$$dW/dz = 2qw, \quad dT/dz = -2bT. \quad (15)$$

代入(10)式, 并且用(14)、(15)式结果可得

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{4}{T^3} + \frac{C}{WT^2}, \quad \frac{d^2W}{dz^2} = \frac{4}{W^3} - \frac{C}{W^2T}, \quad (16)$$

其中 $C = 2I/\pi$, 由上两式可见, 当 $C = 0$ 时, 束宽将以高斯光束光斑传输形式变化, 脉宽也将作同样变化。 C 代表非线性对脉宽及束宽的作用以及时空量间的耦合作用。由(4)式、(5)式可得:

$$\mathcal{D} = 0,$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{I}{2} \left[-\left(\frac{1}{W^2} + W^2q^2\right) + \left(\frac{1}{T^2} + T^2b^2\right) + \frac{C}{2WT} \right] \\ &= \frac{I}{8} \left[-\frac{4}{W^2} + \frac{4}{T^2} - \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dz}\right)^2 + \frac{2C}{WT} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

准粒子动量为零表示在传播过程中光束保持对称。由于 H 不随 z 改变, 所以 H 可用 $z = 0$ 处的值表示, 利用(15)~(17)式简单计算可得:

$$\frac{d^2(T^2 - W^2)}{dz^2} = \frac{16H}{I}, \quad (18)$$

$$\frac{d(T^2 - W^2)}{dz} = \frac{16H}{I}z + \frac{d(T^2 - W^2)_0}{dz}z, \quad (19)$$

$$T^2 - W^2 = \frac{8H}{I}z^2 + \frac{d(T^2 - W^2)}{dz} \Big|_{z=0} z + (T_0^2 - W_0^2). \quad (20)$$

对(16)式进行数值运算, 求出 $T(z)$ 、 $W(z)$ 、 $b(z)$ 、 $q(z)$ 。在运算中用(20)式进行核对, 保证误差小于 0.01。若大于该值, 则减小运算区间。所得结果如下:

1) $T(z)$ 、 $W(z)$ 、 $b(z)$ 、 $q(z)$ 对 H 值的依赖关系, 如图 1 所示。取 $W_0 = 1$, $T_0 = 2$, $b_0 = q_0 = 0$, 实线对应于 $C = 2$, $H = -1$, 为弱作用, 脉冲束宽平方差随 z 减小, 直至 $z = (T_0^2 -$

$W_0^2 z / 8 |H|$ 时 $T = W$, 以后随着 z 值增大, $T < W$. 当 $H > 0$, 如 $H = 13, C = 16$, 为强作用, 自聚焦起主要作用; 时域中色散起主要作用, 脉宽迅速增大, 而 $T^2 - W^2$ 则随 z 增大而增大, b 及 q 与传播距离的关系如图 1(b) 所示. 与自聚焦相应, 在束宽 W 的极小值处, $q = 0$.

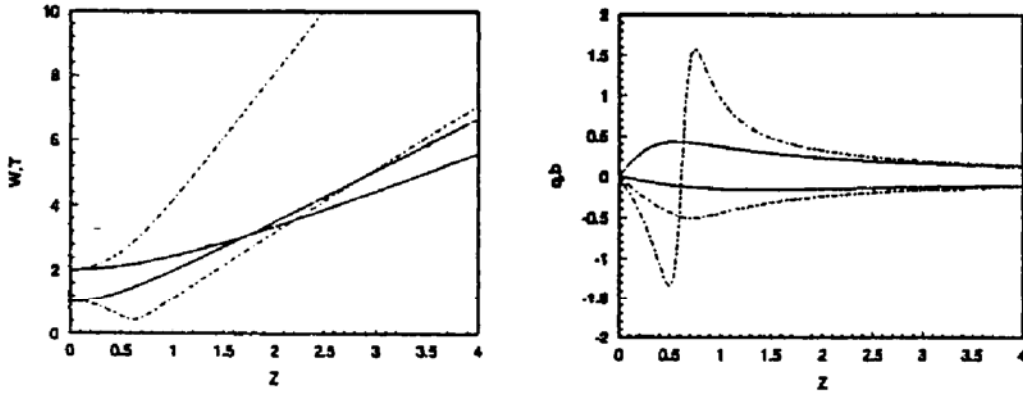


Fig. 1 a. Pulse width and beam width versus the propagation distance. $T_0 = 2, W_0 = 1, b_0 = q_0 = 0$, the dashed curves are at $c = 16, H = 13$, and solid at $c = 2, H = -1$, b. b and q versus the propagation distance at the same conditions as Fig. 1 a

2) 不同初始脉宽 T_0 的影响如图 2 所示. 图中 $W_0 = 1, b_0 = q_0 = 0, C = 5$. 虚线对应于 $T_0 = 2, H = 2.7$; 实线对应于 $T_0 = 8, H = -2$. T_0 越大, H 越小, 由 (17) 式得, d^2T/dz^2 越小, T 随 z 缓慢增长.

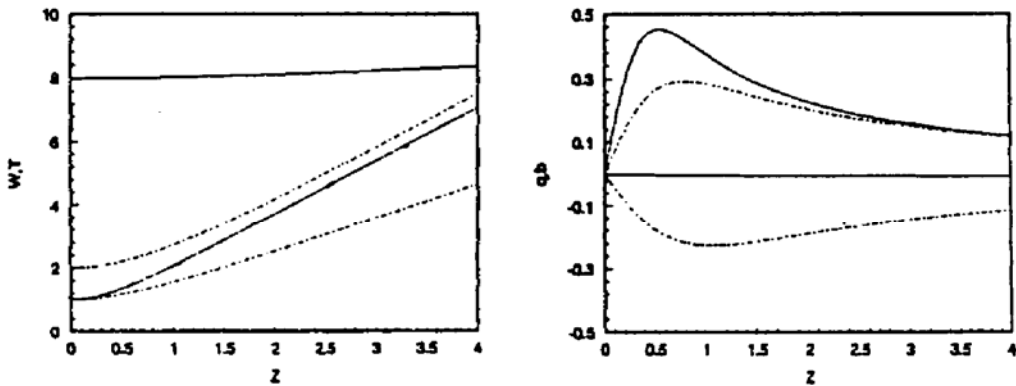


Fig. 2 a. Pulse width and beam width versus the propagation distance. $W_0 = 1, b_0 = q_0 = 0, C = 5$, the dashed curves are at $T_0 = 2, H = 2.7$, and solid at $T_0 = 8, H = -2$, b. b and q versus the propagation distance at the same conditions as Fig. 2 a

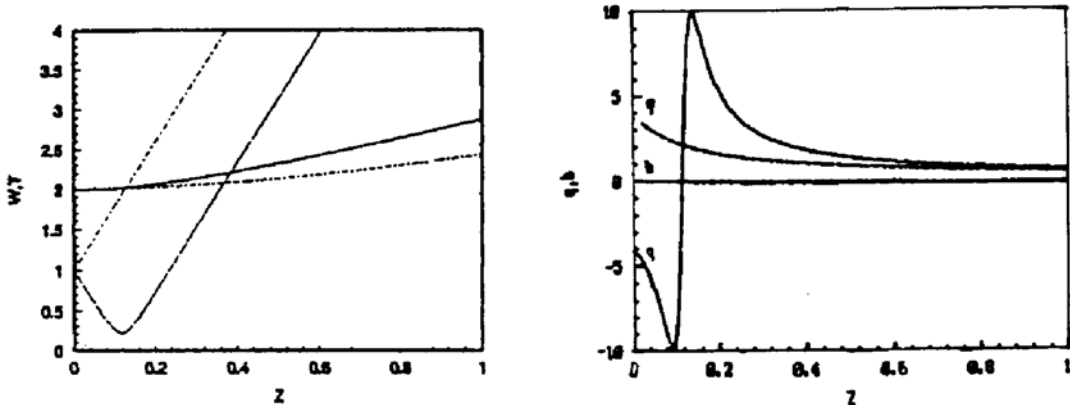


Fig. 3 a. Pulse width and beam width versus the propagation distance. $T_0 = 2, W_0 = 1, C = 5, b_0 = 0$, the dashed curves are at $q_0 = 4, H = -62$, and solid at $q_0 = -4, H = -62$, b. b and q versus the propagation distance at the same conditions as Fig. 3 a

3) 光束会聚的影响见图 3, 图中 $W_0 = 1$, $T_0 = 2$, $C = 5$, $b_0 = 0$, 虚线 $q_0 = 4$, 光束迅速发散, 但 T 的扩展减慢(与图 2 虚线相比), 实线 $q_0 = -4$, 光束会聚后再迅速发散。

4) 光束初啾啾的影响见图 4, 图中的 W_0 、 T_0 、 C 与图 3 相同, 但 $q = 0$, 实线代表正啾啾, $b_0 = 4$, 时域光脉冲“发散”起主要作用, 脉宽迅速发散; 虚线代表负啾啾, $b_0 = -4$, 由于时域光脉冲的“会聚”及自聚焦起主要作用, 脉宽随 z 迅速下降, 而且 W 增长不大。显然这种情况最有利于脉宽压缩, 而且克尔介质长度有一定限制, 否则脉宽将迅速增大。

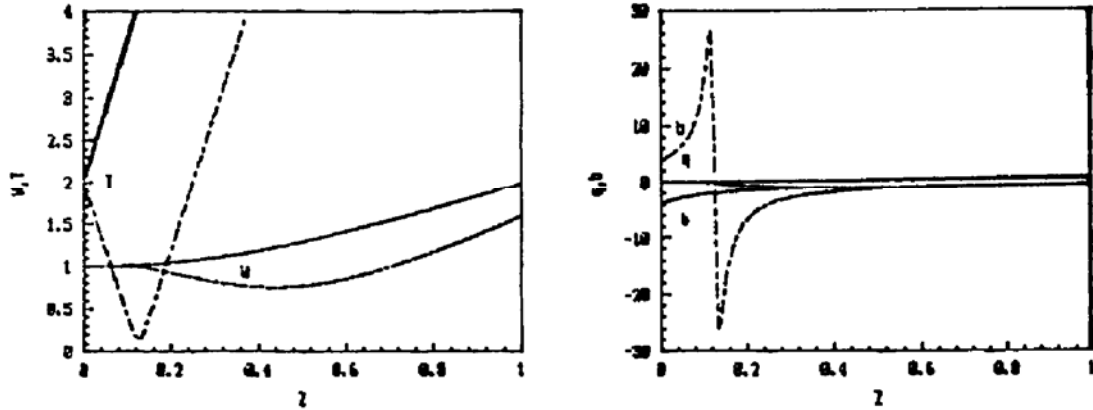


Fig. 4 a. Pulse width and beam width versus the propagation distance. $T_0 = 2$, $W_0 = 1$, $C = 5$, $q_0 = 0$, the dashed curves are at $b_0 = -4$, $H = -62$, and solid at $b_0 = 4$, $H = -62$, b. b and q versus the propagation distance at the same conditions as Fig. 4 a

结 论 本文利用变分法研究了正色散介质中非线性克尔效应对脉冲传输的影响, 得到了传输中的准动量、能量守恒律及一阶矩、二阶矩随传输距离的变化规律, 由此还可作为检验数值法精度的判据。本文还研究了能量不太高、传输距离不太长情况下高斯光束的传输, 得到了脉宽、束宽及时空曲率半径的传输规律, 特别是负啾啾有利于脉冲压缩。这些结论有利于克尔镜锁模腔的设计。

参 考 文 献

- [1] M. Desaix, D. Anderson, M. Lisak, Variational approach to collapse of optical pulses. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1991, 8(10): 2082~2086
- [2] P. Chernev, V. Petrov, Self-focusing of light pulses in the presence of normal group-velocity dispersion. *Opt. Lett.*, 1992, 17(3): 172~174
- [3] Joshua E. Rothengerg, Pulse splitting during self-focusing in normally dispersive media. *Opt. Lett.*, 1992, 17(8): 583~585

Propagation of Optical Pulse in a Normally Dispersive Media

Zhou Guosheng Li Jianqing Song Xiangyang

Zhu Lili Wang Yong Li Xuenong

(Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006)

(Received 31 December 1993)

Abstract The influences of Kerr effect, diffraction and dispersion effect on the propagation properties of laser pulse in a normally dispersive 2+1 dimensional media are discussed. The impacts of initial pulse width, beam width and chirp on the pulse width compression are studied by using numerical method.

Key words pulse width, beam width, self-focusing, chirp.