

# 迭代卷积重建三维折射率场的计算机模拟

贺安之 阎大鹏 朱兆清 张家军

(南京理工大学应用物理系, 南京 210014)

**摘 要** 介绍了迭代卷积重建算法的数值过程, 用 Turbo C. 2.0 开发了该算法的实用软件. 通过计算机模拟运算, 考查了其重建精度、重建误差与投影方向数和迭代次数的关系. 结果表明, 该软件对  $180^\circ$  范围内均匀投影采样, 投影数为 6, 迭代次数为 8~10 次, 仍具有较好的重建精度.

**关键词** 三维重建, 层析.

## 1 引 言

三维折射率场的重建包括两个方面的内容, 一是研究三维折射率场多方向投影数据的获取方法; 二是研究三维折射率场的重建算法. 然而重建算法则是涉及到三维折射率场再现结果的精度和速度. 从目前已发表的各种算法按其投影数据获取的类型分类有“完全数据法”和“非完全数据法”, “完全数据法”是指在  $180^\circ$  范围内获取投影数据, 且三维折射率场中没有遮挡模型, 主要有直接反演法<sup>[1]</sup>, 正交级数法<sup>[2]</sup>, 傅里叶合成法<sup>[1]</sup>, 卷积法<sup>[3]</sup>等. “非完全数据法”有两种含义, 一是指观察角小于  $180^\circ$ , 如受到窗口限制; 二是指场中存在不透明的遮挡模型. 主要有 Sinc 法<sup>[4]</sup>、网格法<sup>[1]</sup>、频率平面恢复法<sup>[5]</sup>、快速傅里叶变换迭代法<sup>[6]</sup>、改进的共轭斜量迭代法<sup>[7]</sup>和迭代卷积法<sup>[8]</sup>等.

本文在分析目前已公开发表的各种算法的基础上, 采用了卷积作为算子的迭代法, 介绍该算法在数字计算机中实现的数值过程, 用 Turbo C. 2.0 开发了其实用软件, 并通过计算机模拟, 考查了其再现精度, 以及再现精度与投影方向数和迭代次数的关系.

## 2 算法的数值过程

在干涉层析中, 对任一三维折射率场, 它的原场和它的投影可由图 1 来表示. 迭代卷积算法的目的就是根据有限观察角的投影数据  $\Phi(\rho, \theta)$  来再现原场  $f(x, y)$ .

### 2.1 原场 $f(x, y)$ 的初始估计

根据先验信息, 预先估计原场的分布形式, 使得估计场在很大程度上接近原场, 这样就可以加快迭代的收敛速度, 提高重建精度. 为了使数值过程的顺利进行, 对原场的估计进行

\* 本工作为国家自然科学基金和霍英东教育基金会青年教师基金资助项目部分内容.

收稿日期: 1993 年 8 月 5 日; 收到修改稿日期: 1993 年 10 月 7 日

数值化. 如图 2 所示, 设在重建范围  $x \in [-MX, MX]$ ,  $y \in [-MY, MY]$  内, 沿  $X, Y$  方向分别分成  $M, N$  个网络采样点, 取  $MX = MY, M = N$ . 例如在软件中取  $M = N = 60$ , 因此以  $M \times N = 3600$  个采样点的值代表原场的估计场, 用二维数组  $f_{xy}[M][N]$  表示.

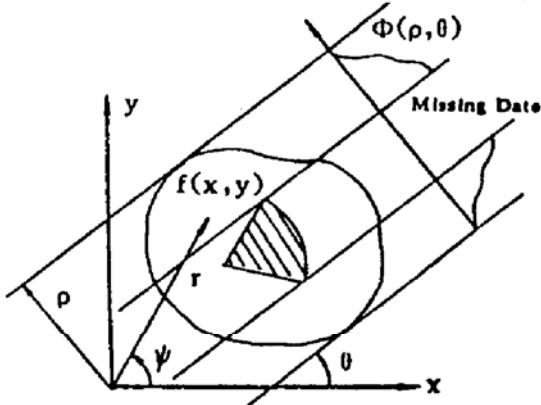


Fig. 1 Original field and its projection

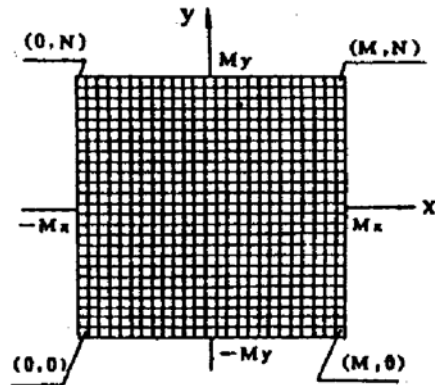


Fig. 2 Numerical representation of estimate field

### 2.2 估计场投影数据的计算

有了原场的初始估计, 就可以在那些投影数据可得到的点计算估计场  $f_{xy}[M][N]$  的投影. 具体的数值过程是根据得到测量投影数据的光线所确定的直线  $L$

$$y = x \tan \theta + \rho / \cos \theta \tag{1}$$

和网络相交点的邻近点  $f_{xy}$  的值, 求得相交点的值. 如图 3 所示, 直线  $L$  和某平行于  $X$  轴 (或  $Y$  轴) 的直线相交点为  $A$ , 它的邻近点则是  $B$  和  $C$ . 在软件中直接用最邻近点  $B$  和  $C$  的线性插值方法求  $A$  的值, 即

$$f_A = (1 - \alpha)f_c + \alpha f_b \tag{2}$$

式中  $\alpha = \overline{AC}/dY$ , 然后将相交点的值与  $\overline{AA}$  相乘后再沿该条直线求和就得到该方向的投影值. 图 3 还表明, 在计算相交点过程中, 按观察角  $\theta$  的范围使用的邻近点是不同的. 例如

$$0 < |\theta| \leq \pi/4, \quad \overline{AA'} = dX / |\cos \theta| \tag{3}$$

$$\pi/4 < |\theta| \leq \pi/2 \quad \overline{AA'} = dY / |\sin \theta| \tag{4}$$

### 2.3 差分场的计算

由可测量的投影数据  $\Phi(\rho, \theta)$  减去估计场的投影数据  $\Phi_e(\rho, \theta)$ , 即  $\Phi_d(\rho, \theta) = \Phi(\rho, \theta) - \Phi_e(\rho, \theta)$ , 得到差分场的投影数据, 然后通过卷积重建算子再现差分场, 即

$$f_d(\rho, \theta) = R\{\Phi_d(\rho, \theta)\} \tag{5}$$

式中  $R$  是卷积重建算子.

### 2.4 卷积重建算子

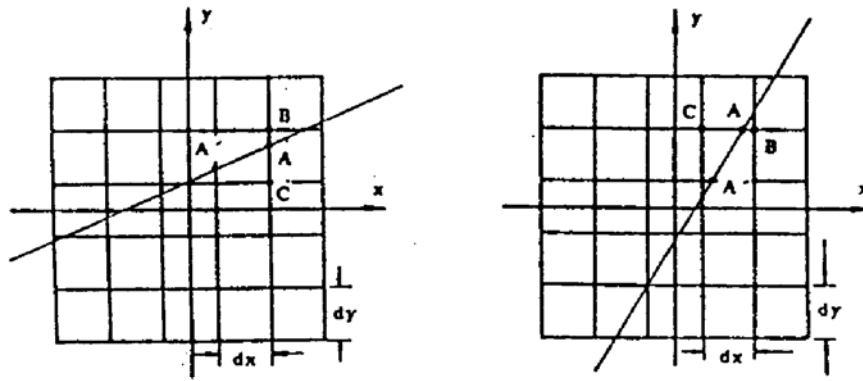
对于从多方向干涉图上获得的投影数据  $\Phi(\rho, \theta)$ , 卷积公式可写成

$$f(x, y) = \int_0^\pi Q(\rho, \theta) d\theta \tag{6}$$

$$Q(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\rho, \theta) h(\rho - \alpha) d\alpha \tag{7}$$

(7) 式中的  $h(\rho - \alpha)$  为重建滤波器, 表明卷积重建算子是将各个方向的投影先滤波, 然后将不同方向投影的滤波结果积分, 得到重建结果. 其关键在于如何设计重建滤波器, 常用的滤波器有 R-L 滤波器<sup>[9]</sup>和 S-L 滤波器<sup>[10]</sup>. 本文在软件的编译中, 使用了这两种滤波器. 当 #

define SHEPP-LOGAN (S-L 滤波器)被定义时,使用 S-L 滤波器;当 #define SHEPP-LOGAN 未被定义时,使用 R-L 滤波器.



(a) To the near points of  $0 < |\theta| \leq \pi/4$ ; (b) To the near point of  $\pi/4 < |\theta| \leq \pi/2$

Fig. 3 Representation of calculating the projective numerical value of estimate field

为了在数字计算机上实现该算法,设每个投影  $\Phi(\rho_i, \theta_j)$  只有在  $\rho = md$  上有采样值,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (M-1)/2$ ;  $\theta = \theta_j = j\pi/N$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (N-1)/2$ ;其中,  $d$  是采样间隔,  $N$  是投影方向数,  $M$  是某方向的采样数,则(7)式可改写成

$$Q(md, \theta_j) = d \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \Phi(md, \theta_j) h[(m-n)d] \quad (8)$$

(8)式的离散卷积可利用快速傅里叶变换在频域内进行计算,则速度可大大提高. 为了避免周期卷积产生的卷绕误差,必须将  $\Phi(md, \theta_j)$  和  $h(md)$  序列补零延拓到  $2M-1$  长度,它的计算公式如下

$$Q(md, \theta_j) = d \times \text{IFFT}\{\text{FFT}[\Phi(md, \theta_j)] \text{with ZP} \times \text{FFT}[h(md) \text{with ZP}]\} \quad (9)$$

式中, ZP 代表补零,  $\text{FFT}[\dots]$  表示对  $[\dots]$  进行快速傅里叶变换,  $\text{IFFT}$  表示对  $\{\dots\}$  进行逆快速傅里叶变换. 当滤波投影  $Q(md, \theta_j)$  求得后,则由下式求得原场  $f(x, y)$  的重建近似  $\bar{f}(x, y)$

$$\bar{f}(x, y) = \frac{\pi}{N} \sum_{j=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} Q(-x \sin \theta_j, +y \cos \theta_j) \quad (10)$$

## 2.5 改变原场的初始估计和迭代

由于迭代算法的第一次计算结果很大程度上关系到迭代算法是否收敛,如果第一次迭代结果与实际偏差十分大,则要使迭代收敛到真实场比较困难. 计算机模拟发现,对改变原场的初始估计,如果原先的估计场  $f_c(x, y)$  加上差分场  $f_d(x, y)$  与小于 1 系数的乘积,则使重建更能保证迭代算法的收敛性. 即

$$f_c^{+1}(x, y) = f_c(x, y) + c_1 f_d(x, y) \quad c_1 \in [0.7, 1] \quad (11)$$

然后由新估计的场  $f_c^{+1}(x, y)$  转到步骤(2.2)计算新估计场  $f_c^{+1}(x, y)$  的投影数据,连续迭代直到终止判据.

## 2.6 缺少数据的处理和迭代终止的判据

由于所获取的多方向干涉图其方向数有限,或由于被测场中存在不透明的遮挡物,使投影数据丢失,因而需对丢失的数据进行估计和修正. 补齐缺少的数据必须满足三个条件<sup>[8]</sup>.

1) 在数据缺少区域,补齐的数据要和测量的数据保持连续、光滑,这是被测折射率场的性质所决定的.

2) 补齐数据的绝对值最大值不能大于条件 1) 的限制. Zien<sup>[11]</sup> 指出, 对于各方向的投影数据, 其投影数据曲线下的面积是相等.

3) 所有投影的积分是相等的, 这个条件是若当(Radon)变换的要求.

本文中利用二次插值法来补齐缺少的数据. 在补齐的数据和原投影数据交接处附近, 还可能会出现曲线拐面, 产生不光滑的情况, 在软件的设计中使用了曲线拟合数值磨光方法<sup>[12]</sup>. 对于迭代终止的判据, 本文通过被测场的峰值来确定终止条件, 若两个相邻迭代的峰值相对变化小于某个预先给出的设定值, 则可以判断迭代终止.

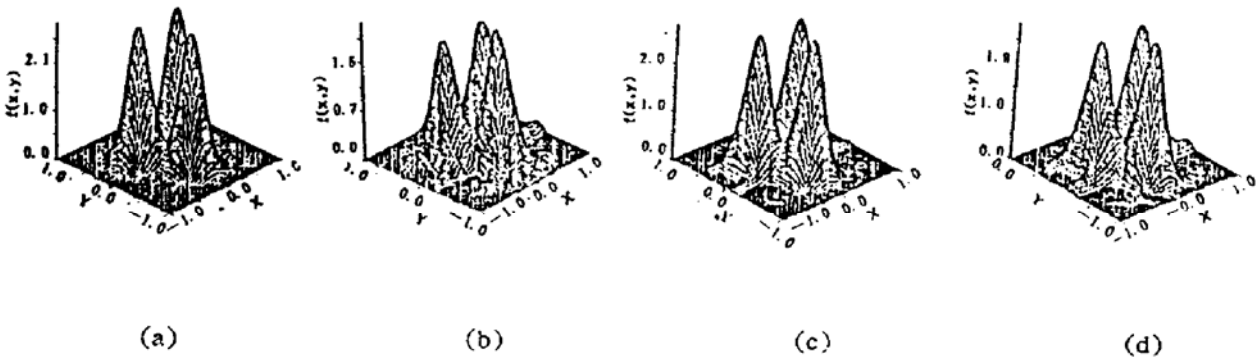
作者用 Turbo C 2.0 实现了上述算法的数值过程.

### 3 计算机模拟运算

对有限观察角的三维折射率场进行计算机模拟运算, 选择的模拟折射率场的分布函数为

$$f(x, y) = 3\exp[-20(x - 0.25)^2 - 20(y - 0.433)^2] + 3\exp[-20(x - 0.25)^2 - 20(y + 0.433)^2] + 3\exp[-20(x + 0.5)^2 - 20y^2] \quad (12)$$

重建区域为  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-1, 1]$ , 投影方向数为 6, 即  $\theta = \pm 15^\circ, \pm 45^\circ, \pm 75^\circ$ ; 各方向的采样数  $MN = 30$ , 重建系数  $c_1 = 0.8$ . 模拟重建的结果如图 4 所示. 其峰值随迭代次数的变化如表 1 所示. 显然, 随着迭代次数的增加, 峰值间的误差变小, 也即再现精度提高.



(a) space diagram of simulative function; (b) 1st iteration; (c) 3rd iterations; (d) 10 iterations

Fig. 4 Reconstructed result of three peak simulative function.

Table 1 Variation of peak value with number of iterations

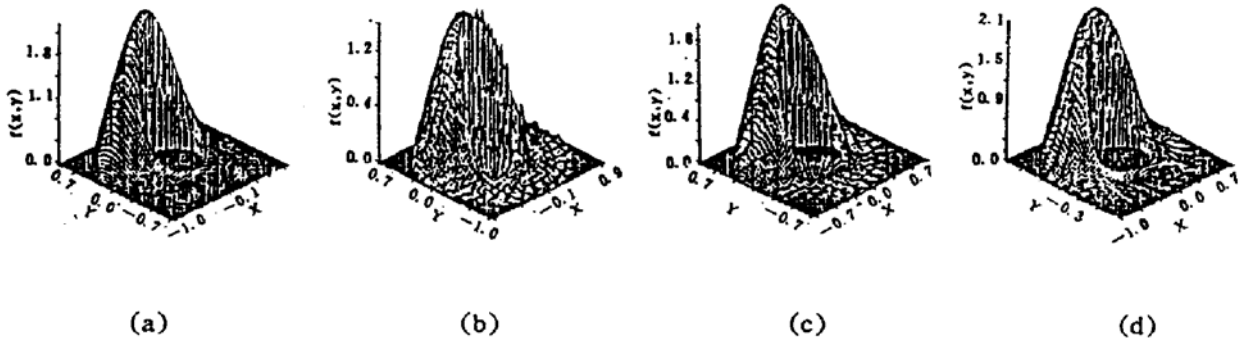
Number of iterations	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
peak value	2.0673	2.6169	2.7954	2.8657	2.8838	2.9009	2.8972	2.9065	2.9100	2.9066

作者还用计算机模拟计算了含有遮挡物三维折射率场的重建情况, 模拟函数为

$$f(x, y) = \sqrt{1 - r^2} \exp[-0.08 - 3.0 \times (r - 1.2x)] \quad (13)$$

重建区域为  $x \in [-1, 0]$ ,  $y \in [-1, 1]$ ,  $x^2 + y^2 < r_0^2$  为遮挡物体, 其中  $r_0 = 0.4$ . 投影方向数取 7, 即  $\theta = 0^\circ, \pm 24^\circ, \pm 48^\circ, \pm 72^\circ$ . 每个方向的采样数  $MN = 35$  个, 重建系数  $c_1 = 0.8$ ; 重建结果如图 5 所示.

为了进一步验证本文所设计的三维再现软件的再现情况, 作者还对由(12)式所示的模拟



(a) The diagram of original function; (b) 1 st iteration; (c) 3rd iterations; (d) 10th iterations

Fig. 5 Reconstructed result of simulative function with opaque object

函数, 分别考查了软件的再现精度与投影方向数的关系, 再现精度与迭代次数的关系. 图 6 表示了迭代次数为 10 次时重建误差与投影方向数的关系. 显然, 当投影方向数小于 6 个时, 则完全不能重建; 当投影方向数增加时, 则重建误差减小; 当投影方向数超过 8 个时, 有很高的再现精度. 图 7 表示了投影方向数为 6 个时, 重建误差与迭代次数的关系. 显然, 当迭代次数为 10 次左右时, 重建误差达到最小值, 如果迭代次数继续增加, 最大误差和平均误差又有增加的趋势, 这也说明了在重建过程中, 并不是迭代次数越多越好.

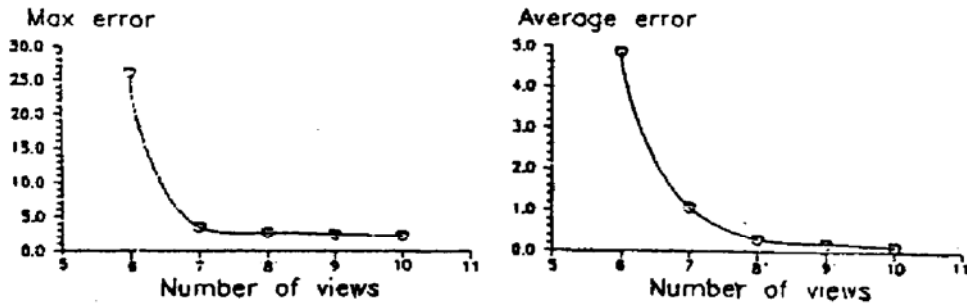


Fig. 6 Relationship between reconstructed error and unnumber of views

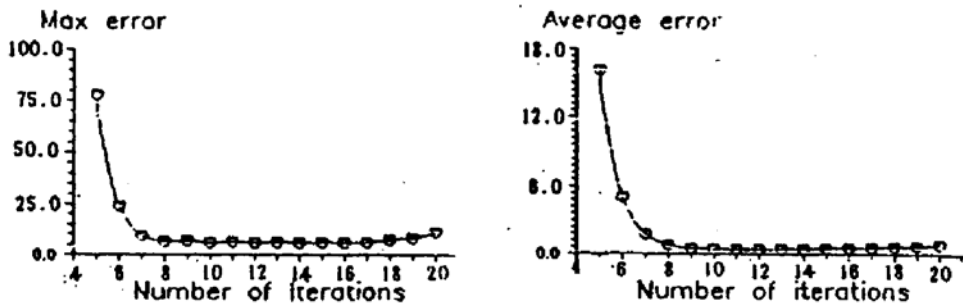


Fig. 7 Relationship between reconstructed error and unnumber of iterations

**结 论** 以卷积作为算子的迭代卷积法, 经过作者在 Turbo C 2.0 上的开发, 是一种三维折射率场重建的实用软件. 它既适用于“完全数据”情况下的再现, 也适用于“非完全数据”的再现. 该软件对  $180^\circ$  范围内的均匀采样, 当投影方向数为 6, 迭代次数为 10 次左右时, 具有较好的重建精度; 而且计算速度较快, 在 80486 计算机上迭代一次只需 8 s. 该软件可用于真实

三维折射率场如流场的再现.

### 参 考 文 献

- [1] Sweeney D. W., Vest C. M., Reconstruction of three-dimensional refractive index field from multidirectional interferometric data. *Appl. Opt.*, 1973, **12**(11): 2649~2664
- [2] Matulka R. D., Determination of three-dimensional density field from holographic interferogram. *J. Appl. Phys.*, 1971, **42**(3): 1109~1112
- [3] 高益庆, 康琦, 丁汉泉, 一种大视觉角重建折射率场的简易方法. *光学学报*, 1988, **8**(2): 181~187
- [4] Vest C. M. *et al.*, Quantitative interpretations of multi-directional holographic interferometry. AD-A017596, 1975
- [5] Harris J. L., Diffraction and resolving power. *J. Opt. Soc. Am.*, 1964, **54**(7): 931~935
- [6] 高益庆, 丁汉泉, 用快速傅里叶变换迭代重建三维折射率场. *光学学报*, 1988, **8**(10): 892~897
- [7] 高益庆, 丁汉泉, 用改进的共轭斜量迭代法重建三维折射率场. *光学学报*, 1989, **9**(4): 357~363
- [8] Vest C. M., Prikry I., Tomography by iterative convolution; empirical study and application to interferometry. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(14): 2433~2440
- [9] Ramachandran G. N., Lakshminarayaman A. V., Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs. Part III, *Ind. J. Pure Appl. Phys.*, 1991, **9**: 997
- [10] Shepp L. A., Logan B. F., The Fourier reconstruction of a head section. *IEEE Trans Nucl. Sci.*, 1974, **NS-21**: 21~39
- [11] Tse-Fou Zien, William C Ragsdale *et al.*, Quantitative determination of three-dimensional density field by holographic interferometry. *AIAA. J.*, 1975, **13**(7): 841~842
- [12] 齐东旭, 曲线拟合的数值磨光方法. *光学学报*, 1975, **18**(3): 321~325

## Computer Simulation of Three-Dimensional Refractive Index Field From Iterative Convolution

He Anzhi    Yan Dapeng    Zhu Zhaoqing    Zhang Jiajun

(Department of Applied Physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210014)

(Received 5 August 1993; revised 7 October 1993)

**Abstract** The process of numerical value of iterative convolution algorithm is presented and a practical software is developed with turbo C 2.0. By means of computer simulation, we checked the reconstructed precision of this software and the relationship of reconstructed error with projective direction numbers and iterative numbers. The results show that this software has a good reconstructed precision as the projective sampling at equal interval over  $180^\circ$ , with the projective numbers of 6 and the iteration numbers of 8~10

**Key words** three-dimensional reconstruction, tomography.