

干涉型光纤传感器随机相位漂移 统计特性研究

过巴吉

郭栓远

(西安电子科技大学技术物理系, 西安 710071) (西安应用光学研究所, 西安 710100)

摘 要 提出描述干涉型光纤传感器随机相位漂移 $\Delta\phi(t)$ 物理模型, 给出了 $\Delta\phi(t)$ 的自相关函数和功率谱密度函数, 还给出了随机相位漂移周期的统计分布.

关键词 干涉型光纤传感器, 随机相位漂移, 自相关函数.

1 引 言

自70年代以来, 光纤传感器作为光电子技术中的一个应用领域, 日益受到人们的重视, 特别是具有高灵敏度的干涉型光纤传感技术得到了迅速的发展, 它在温度、电场、磁场、水声、地震波的测量等方面有着重要的应用^[1,2].

在干涉型光纤传感器中, 光纤在受到外界物理场的作用下, 其内部传输光的相位发生变化, 通过干涉原理来检测这种相位变化, 便可获得外界物理场的信息. 自然, 任何能引起光纤中传输光相位改变的各种随机因素都会导致产生一个相应的随机相位变化量, 并叠加到有用的相位信号中去, 表现为一个随机相位漂移, 即相位噪声, 在信号检测中形成衰落. 因此, 抗衰落技术便成为干涉型光纤传感器研究中的一个重要课题. 这要求了解随机相位漂移 $\Delta\phi(t)$ 的统计特性, 如 $\Delta\phi(t)$ 的统计分布, 自相关函数和功率谱密度函数等, 以便利用随机信号检测中的统计方法提取有用信号. 关于干涉型光纤传感器中随机相位漂移的统计规律, 未见有研究报告. 本文提出一个描述干涉型光纤传感器随机相位漂移 $\Delta\phi(t)$ 的物理模型, 给出 $\Delta\phi(t)$ 的自相关函数及功率谱密度函数, 还给出随机相位漂移周期的统计分布.

2 物理模型及其数学处理

图1是干涉型光纤传感器的基本结构. 设信号臂S和参改臂R出射的光场 E_s 和 E_r 分别表示为

$$E_s = E \exp i[\omega_0(t + \tau_1) + \phi_s(t) + s(t)] \quad (1)$$

$$E_r = aE \exp i[\omega_0(t + \tau_2) + \phi_r(t) + m(t)] \quad (2)$$

则在探测器表面上干涉时的光强可表示为

$$I(t) = |E|^2(1 + \alpha^2) + 2\alpha|E|^2 \cos [\omega_0\tau_0 + \Delta\phi(t) + S(t) - m(t)] \quad (3)$$

式中 ω_0 为光的圆频率； $\tau_0 = \tau_1 - \tau_2$ 为两臂不对称引起的时间差； $m(t)$ 为 R 臂的相位调制； $S(t)$ 为外界物理场引起的相位变化； $\Delta\phi(t) = \phi_s(t) - \phi_r(t)$ 为外界各种随机因素引起的随机相位漂移，是检测 $S(t)$ 时的噪声。下面讨论 $\Delta\phi(t)$ 的统计特性。

2.1 $\Delta\phi(t)$ 的物理模型

讨论所涉及的是平稳随机过程。根据工程上所碰到的平稳随机过程，大多数都能满足各态历经的条件^[3]，因此假定干涉型光纤传感器中的相位噪声 $\Delta\phi(t)$ 是一个各态历经的平稳随机过程(当然和任何工程上的随机过程一样需在实际应用中检验)。在此基础上，进一步假定 $\Delta\phi(t)$ 随时间的变化规律可近似地用图 2 表示，这意味着下述假定是成立的，即：1) 在一个很短的时间间隔 Δt_n

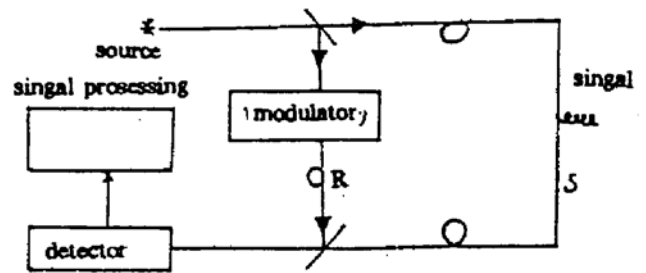


Fig. 1 Basic fiber-optic interferometric sensor

内，用 $\Delta\phi(t)$ 的平均值 $\overline{\Delta\phi(t)} = (-1)^n \Delta\phi_n$ 代替 Δt_n 内各时刻的瞬时值，但其值大小和正负是随机的；2) $\overline{\Delta\phi(t)}$ 取值不变的时间间隔 Δt_n 的长短也是随机的；3) Δt_n 和 $\Delta\phi_n$ 的取值是相互独立的；4) $\Delta\phi_n$ 的取值分布近似为正态分布。这样有：

$$P(\Delta\phi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(\Delta\phi_n)^2}{\sigma^2} \right] \quad (4)$$

及

$$\overline{\Delta\phi(t)} = (-1)^n \Delta\phi_n \quad (5)$$

式中 σ^2 为方差， n 为观察时间 t 内 $\Delta\phi(t)$ 取值正负号变化的次数， n 也是一个随机变量。

2.2 n 的统计分布

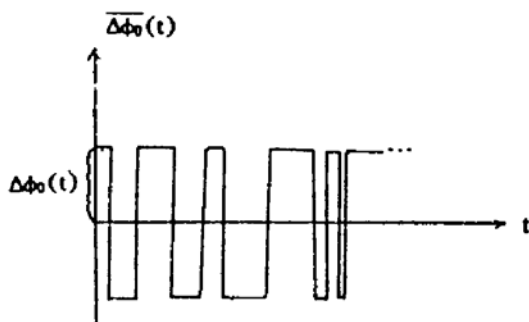


Fig. 3 Variation of $\overline{\Delta\phi(t)}$ with time but $|\overline{\Delta\phi(t)}| = \text{constant}$

假定一个特殊的情况即 $\Delta\phi_n$ 是不随 n 而变的定值情况，如图 3 所示，这类似于随机电报信号的情况。这类随机过程具有无后效性，它服从泊松过程的三个条件^[4]，正负号变化次数 n 这个随机事件服从泊松分布，即有

$$P(n) = (\eta t)^n e^{-\eta t} / n! \quad (6)$$

式中 η 为单位时间内 $\Delta\phi(t)$ 正负变化的平均次数。当取 Δt_0 (对应 $n = 0$) 内的平均值 $\overline{\Delta\phi(t)}$ 为正值时，即如图 3 中所示的情况，则在时间 t 内 $\overline{\Delta\phi(t)}$ 取正

值和负值的概率分别为

$$P_+ = P(0) + P(2) + \dots = e^{-\eta t} \cos \eta t \quad (7)$$

$$P_- = P(1) + P(3) + \dots = e^{-\eta} \sin h\eta t \quad (8)$$

2.3 $\overline{\Delta\phi(t)}$ 的自相关函数 $g(\tau)$ 和噪声功率谱密度函数 $S(\omega)$

由(4)~(8)式,可求出 $\overline{\Delta\phi(t)}$ 的自相关函数 $g(\tau)$ 和功率谱密度函数 $S(\omega)$. 按自相关函数的定义有

$$g(\tau) = \langle \overline{\Delta\phi(t)} \overline{\Delta\phi(t_1 + \tau)} \rangle \\ \langle \Delta\phi_{n_1}, \Delta\phi_{n_2} \rangle \langle (-1)^{n_1} (-1)^{n_2} \rangle \quad (9)$$

式中符号 $\langle \rangle$ 表示求平均值. 利用(4)式有

$$\langle \Delta\phi_{n_1} \rangle \langle \Delta\phi_{n_2} \rangle = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad (10)$$

利用(7)式和(8)式可得

$$\langle (-1)^{n_1} (-1)^{n_2} \rangle = e^{-\eta t_1} e^{-\eta t_2} [\cos h\eta\tau \cos h\eta t_2 + \cos h\eta\tau \sin h\eta t_2 \\ + \sin h\eta\tau \sin h\eta t_2 + \sin h\eta\tau \cos h\eta t_2] = e^{-2\eta\tau} \quad (11)$$

这里 $t_2 = t_1 + \tau$, 并有 $g(\tau) = g(-\tau)$ 所以将(10)式和(11)式代入(9)式后有

$$g(\tau) = \frac{\sigma^2}{e\pi} e^{-2\eta|\tau|} \quad (12)$$

即 $\overline{\Delta\phi(t)}$ 的自相关函数具有指数衰减的形式.

关于相位噪声 $\overline{\Delta\phi(t)}$ 的功率谱密度函数 $S(\omega)$ 有

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\eta}{4\eta^2 + \omega^2} \quad (13)$$

可见功率谱密度函数具有罗仑兹形式.

2.4 随机相位漂移周期的概率分布

随机相位漂移周期是指 $\overline{\Delta\phi(t)}$ 取值相同的两个相邻样本值之间的时间间隔, 现考察随机相位漂移某一样本值 $\overline{\Delta\phi(t)}$, 并把开始考察的时刻定为时间坐标的原点, 用 $N(t)$ 表示时刻 t 以前 $\overline{\Delta\phi(t)}$ 取值正、负变化的次数. 如果在时刻 t 之前 $\overline{\Delta\phi(t)}$ 发生了 $N(t) = n - 1$ 次正、负号变化仍没有出现重复样本值 $\Delta\phi_n$, 则表明重复样本值的周期 T 大于 t . 显然 $T > t$ 的概率与 $N(t) < n$ 的概率相对应, 即有

$$P(T > t) = P(N(t) \leq n - 1) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\eta t)^m}{m!} e^{-\eta t} \quad (14)$$

这里已利用了(6)式. 设随机相位漂移周期为 t 的概率密度为 $p(t)$, 则有

$$P(T \leq t) = \int_0^t p(t) dt = 1 - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\eta t)^m}{m!} e^{-\eta t} \quad (15)$$

由此可得

$$p(t) = \frac{dp(T \leq t)}{dt} = \frac{\eta^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\eta t}, \quad t > 0 \quad (16)$$

将上式与 Γ 分布相比较, Γ 分布的形式为

$$p(t) = \frac{\mu^{-\nu} t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-t/\mu} \quad (17)$$

可见, (16)式是 Γ 分布在 $\nu = n$ 和 $\mu = 1/\eta$ 时的一个特别情况.

3 结 论

干涉型光纤传感器中的随机相位漂移 $\overline{\phi}(t) = (-1)^n A \phi_n$ 按本文所提出的物理模型, 其基本的统计特性是: $A \phi_n$ 服从平均值为零的正态分布; n 服从泊松分布; $\overline{\phi}(t)$ 的自相关函数 $g(\tau)$ 具有指数衰减的形式, 其功率谱密度函数 $S(\omega)$ 具有罗仑兹形式; 随机相位漂移周期服从 Γ 分布.

参 考 文 献

- [1] T. G. Giallorenzi, J. A. Bucaro, A. Dandridge *et al.*, Optical fiber sensor technology. *IEEE, J. Quant. Electron.*, 1982, **QE-18**(4): 626~665
- [2] V. I. Busurin, A. S. Semenov, N. P. Udalov, Optical and fiber-optic sensors. *Sov. J. Quant. Electron.*, 1985, **15**(5): 595~619
- [3] 盛骤, 黄纪表, 谢式千等, 工程数学: 概率论与数理统计, 第 8 次, 北京, 高等教育出版社, 1983: 175~176
- [4] 盛骤, 黄纪表, 谢式千等, 工程数学: 概率论与数理统计, 第 8 次, 北京, 高等教育出版社, 1983: 149~151

Statistical Characteristics of Random Phase Drift in the Fiber-Optic Interferometric Sensor

Guo Siji

(Department of Applied Physics, Xi'an University, Xi'an 710071)

Guo Shuanyun

(Xi'an Institute of Applied Optics, Xi'an 710100)

(Received 3 August 1993; revised 1 September 1993)

Abstract In this paper a physical model describing random phase drift of the fiber-optic interferometric sensor is presented. The autocorrelation function and the density function of power spectrum for the random phase drift are derived. The statistical distribution for drift period of the random phase is given.

Key words fiber-optic interferometric sensor, random phase drift, auto-correlation.