

噪声之间的耦合对一维激光场的影响*

朱士群 印建平 陈玉华

(苏州大学物理系, 苏州 215006)

摘 要 本文从理论上对加性噪声和倍增噪声之间有耦合作用的一维激光模型进行了分析, 求出定态时激光强度分布函数的解析形式. 同噪声之间不存在耦合的激光模型相比较, 噪声之间的耦合增强了激光强度的涨落.

关键词 加性噪声, 倍增噪声, 耦合, 涨落.

1 引 言

理论分析和实验测量表明, 既含有加性又含有倍增白噪声的单模激光系统具有较大的反常涨落行为^[1~5]. 这种涨落主要来源于泵源噪声, 是由外部随机扰动耦合到系统后产生的, 以倍增噪声来表征. 而由自发跃迁产生的量子起伏通常以加性噪声来表征. 在某些实际情形中, 加性噪声和倍增噪声往往同时出现. 在以往的理论分析中^[1~5], 认为这两种噪声来自不同的噪声源, 并作为相互独立的随机变量来处理. 其实在某些情形中, 这两种噪声很可能来自共同的噪声源, 它们之间不是相互独立而是存在一定程度的耦合.

本文从理论上对加性和倍增噪声有耦合的单模激光系统进行分析, 从一维激光模型出发, 导出了定态时激光强度分布函数的解析表达式, 算出了激光强度的平均值、方差和偏斜度. 同加性和倍增噪声为独立变量的激光模型进行比较, 结果表明, 噪声之间的耦合增加了激光强度的涨落.

2 理论模型

如果只考虑激光强度的涨落, 两种白噪声有耦合作用的单模激光可用一维郎之万方程表示为^[3,4]:

$$\frac{dx}{dt} = a_0x - Ax^3 + \frac{P}{2x} + xp(t) + q(t), \quad (1)$$

式中, $I = x^2$ 是无量纲的激光强度, 参量 a_0 和 A 分别是增益和自饱和系数, 随机变量 $q(t)$ 和 $p(t)$ 表示量子和泵浦噪声. 随机噪声的统计性质可由它们的一次矩和二次矩表示为:

* 本课题得到国家自然科学基金资助.

收稿日期: 1993年7月21日; 收到修改稿日期: 1993年10月5日

$$\langle q(t) \rangle = \langle p(t) \rangle = 0, \quad (2)$$

$$\langle q(t)q(t') \rangle = P\delta(t-t'), \quad (3)$$

$$\langle p(t)p(t') \rangle = P'\delta(t-t'), \quad (4)$$

$$\langle q(t)p(t') \rangle = \lambda \sqrt{PP'}\delta(t-t'), \quad (0 \leq \lambda \leq 1). \quad (5)$$

这里 P 和 P' 分别是量子噪声和泵浦噪声强度, 参量 λ 表示加性和倍增噪声之间耦合的程度. 噪声之间耦合为零, 即两种噪声是相互独立的随机变量时, $\lambda = 0$; 噪声之间的耦合最强时, $\lambda = 1$; 否则 λ 介于 0 和 1 之间.

与方程(1)~(5)相对应的激光场 $x = \sqrt{I}$ 的几率密度函数 $Q(x, t)$ 所满足的福克-普朗克方程为^[6,7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} \left[(a_0 x - Ax^3 + \frac{P}{2x} + \frac{\lambda}{2} \sqrt{PP'} + \frac{P'}{2} x) Q(x, t) \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(P + 2\lambda \sqrt{PP'} x + P' x^2) Q(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

如果加性和倍增噪声为相互独立的随机变量, 即 $\lambda = 0$, 方程(6)就化简为在文献[1~5]中讨论得相当详细的福克-普朗克方程了.

3 定态解

从方程(6)可直接求得噪声之间耦合系数 λ 为任意数值时定态激光场分布函数 $Q(x, t)$ 的解. 为了讨论的简便, 先研究噪声之间耦合为最强时, 即 $\lambda = 1$ 时的情形. 当 $\lambda = 1$ 时, 定态分布函数 $Q(x)$ 为:

$$Q_0(x) = N_0 x \left(1 + \sqrt{\frac{P'}{P}} x \right)^{2\alpha_0} \exp \left[-\frac{Ax^2}{P'} + \frac{4A \sqrt{PP'} x}{(P')^2} + \frac{\beta_0}{1 + \sqrt{P'/Px}} \right], \quad (7)$$

式中 $\alpha_0 = \frac{a_0}{P'} - \frac{3AP}{(P')^2} - 1$, $\beta_0 = \frac{2a_0}{P'} - \frac{2AP}{(P')^2} + 1$, N_0 是归一化常数, 由 $\int_0^\infty Q_0(x) dx = 1$ 确定.

激光强度 I 的 n 次幂的预期值为

$$\langle I^n \rangle = \langle x^{2n} \rangle = \int_0^\infty x^{2n} Q_0(x) dx. \quad (8)$$

这样, 通过方程(8)的数值积分, 就可以得到激光强度为 $\langle I \rangle = \int_0^\infty x^2 Q_0(x) dx$. 归一化强度方差

为 $\lambda_2(0) = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} - 1$, 归一化强度偏斜度为 $\lambda_3(0) = \frac{\langle I^3 \rangle}{\langle I \rangle^3} - 3\lambda_2(0) - 1$. 当激光在远低于阈值条件下工作时, $Ax^2 \ll |a_0|$, 这时方程(7)可简化为

$$Q_1(x) = N_1 x \left(1 + \sqrt{P'/Px} \right)^{2\alpha_1} \exp \left(\frac{\beta_1}{1 + \sqrt{P'/Px}} \right), \quad (a_0 < 0) \quad (9)$$

式中 $\alpha_1 = \frac{a_0}{P'} - 1$, $\beta_1 = \frac{2a_0}{P'} + 1$, 归一化常数

$$\frac{1}{N_1} = \frac{1}{(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_1 + 2)} {}_1F_1(-2 - 2\alpha_1; -2\alpha_1; \beta_1) \quad (10)$$

这里 ${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$ 是合流超几何函数^[8]. 这时, 激光强度的平均值为

$$\langle I \rangle_1 = \frac{-P}{a_0 + P'} + \frac{3PP'}{2(2a_0 + P')(a_0 + P')} - \frac{3a_0P {}_1F_1(-1 - 2\alpha_1; -2\alpha_1; \beta_1)}{(2a_0 + P')(a_0 + P') {}_1F_1(-2 - 2\alpha_1; -2\alpha_1; \beta_1)} \quad (11)$$

归一化方差为:

$$\lambda_{21}(0) = \frac{P}{(2a_0 + 3P')(2a_0 + 4P')\langle I \rangle_1} \left[(9P' - 22a_0) - \frac{14P}{\langle I \rangle_1} \right] - 1, \quad (12)$$

归一化偏斜度为

$$\lambda_{31}(0) = \frac{55P^2}{(2a_0 + 3P')(2a_0 + 5P')(2a_0 + 6P')\langle I \rangle_1^2} \left[(2a_0 - 3P') + \frac{2P}{\langle I \rangle_1} \right] + \frac{6P[(23/2)P' - 2a_0]}{(2a_0 + 5P')(2a_0 + 6P')\langle I \rangle_1} [1 + \lambda_{21}(0)] - 3\lambda_{21}(0) - 1 \quad (13)$$

当激光在远高于阈值条件下工作时, 数值计算表明, 激光强度的平均值、归一化方差和偏斜度的数值仍比 $\lambda = 0$ 时的结果大, 但两者的差别大为减小.

4 比 较

加性噪声和倍增噪声之间的耦合对激光强度涨落的影响, 可通过比较噪声之间有最大耦合的激光模型 ($\lambda = 1$) 与噪声为独立变量的激光模型 ($\lambda = 0$) 之间的差别看出来.

激光强度的平均值 $\langle I \rangle$ 作为泵浦参量 a_0 的函数画在图 1 中. 从图 1 可见, 当激光在远低于阈值或在阈值附近工作时, 平均强度 $\langle I \rangle$ 随耦合系数 λ 的增加而增加. 但当激光在远高于阈值条件下工作时, 平均强度 $\langle I \rangle$ 受耦合系数 λ 的影响不断减小, $\langle I \rangle$ 几乎随 a_0 线性增长.

归一化激光强度方差 $\lambda_2(0)$ 和偏斜度 $\lambda_3(0)$ 以 a_0 作为自变量画在图 2 和图 3 中. 显然, $\lambda_2(0)$ 和 $\lambda_3(0)$ 在衰减为零之前均有一峰值. 峰的高度随 λ 的增加而增加, 峰的位置随 λ 的增加向 a_0 减小的方向移动. 从图中可见, 当激光在低于阈值条件下工作时, 噪声之间的耦合大大增强了激光强度的涨落; 而当激光在远高于阈值条件下工作时, 噪声之间的耦合对激光强度涨落的影响减小, λ 取不同值的曲线之间的差别也相应减小.

当噪声间的耦合系数 λ 介于 0 和 1 之间时, 从方程(6) 得到的激光场 x 的定态分布函数为:

$$Q(x) = Nx(1 + 2\lambda x \sqrt{P'/P} + P' x^2/P)^{-\alpha} \exp \left[-\frac{Ax^2}{P'} + \frac{4A\lambda x \sqrt{P/P'}}{P'} \right]$$

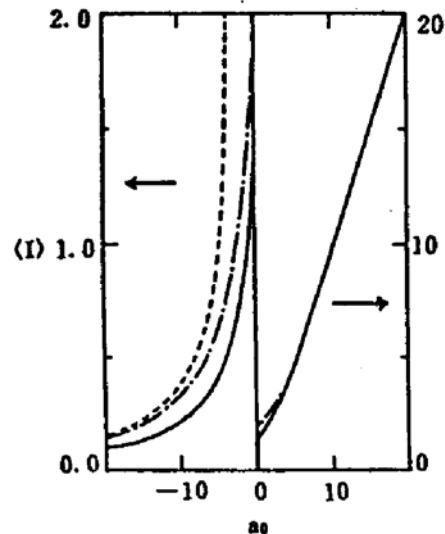


Fig. 1 The mean steady state laser intensity $\langle I \rangle$ as a function of the pump parameter a_0 with $A = 1$, $P = 2$ and $P' = 1.32$; —, $\lambda = 0$; - · -, $\lambda = 1$; - · -, asymptotic result [Eq. (11)]

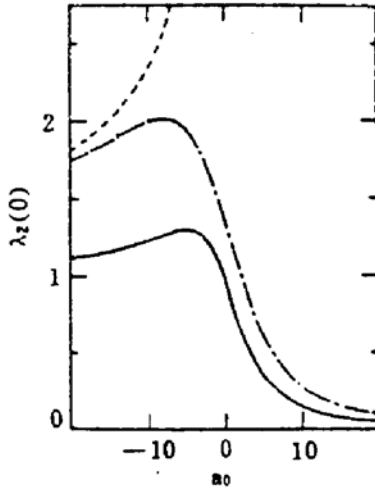


Fig. 2 The normalized variance $\lambda_2(0)$ of the laser intensity as a function of the pump parameter a_0 with $A = 1$, $P = 2$ and $P' = 1.32$: —, $\lambda = 0$; - · -, $\lambda = 1$; --, asymptotic result [Eq. (12)]

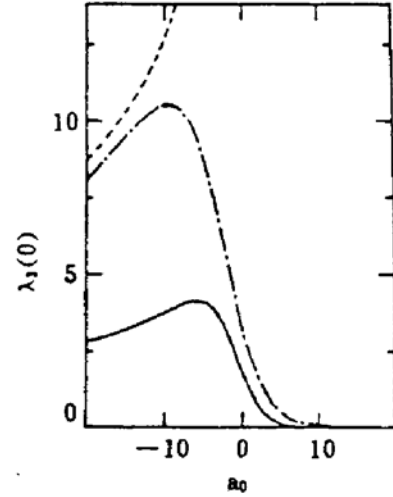


Fig. 3 The normalized skewness $\lambda_3(0)$ as a function of a_0 with $A = 1$, $P = 2$ and $P' = 1.32$: —, $\lambda = 0$; - · -, $\lambda = 1$; --, asymptotic result [Eq. (13)]

$$- \beta \arctg \left(\frac{\lambda + x \sqrt{P'/P}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right), \tag{14}$$

式中 N 是归一化常数, α, β 分别为:

$$\alpha = \frac{a_0}{P'} - \frac{AP(4\lambda^2 - 1)}{(P')^2} - 1, \quad \beta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \left[\frac{2a_0}{P'} - \frac{2AP(4\lambda^2 - 3)}{(P')^2} + 1 \right]. \tag{15}$$

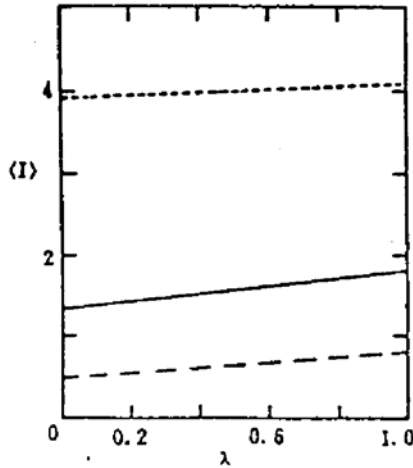


Fig. 4 The mean laser intensity $\langle I \rangle$ as a function of the coupling constant λ with $A = 1$, $P = 2$ and $P' = 1.32$: ---, $a_0 = -4$; —, $a_0 = 0$; · · ·, $a_0 = 4$

从方程(14)和(15)算出的低于阈值 ($a_0 = -4$)、阈值处 ($a_0 = 0$) 以及高于阈值时 ($a_0 = 4$) 激光的平均强度 $\langle I \rangle$ 、归一化强度方差 $\lambda_2(0)$ 和偏斜度 $\lambda_3(0)$ 随噪声耦合系数 λ 的变化曲线分别画在图4、图5和图6中. 从图4可见, 激光平均强度 $\langle I \rangle$ 随 λ 的增加而线性增长. 在阈值时, 曲线斜率大, $\langle I \rangle$ 增长快; 在高于阈值时, 曲线斜率小, $\langle I \rangle$ 增长慢. 从图5和图6可见, 低于阈值时, $\lambda_2(0)$ 和 $\lambda_3(0)$ 随 λ 的增加而增加较快; 高于阈值时, $\lambda_2(0)$ 和 $\lambda_3(0)$ 随 λ 的增加而增加缓慢. 这些表明, 低于阈值时, 噪声间的耦合对激光场的涨落影响较大, 而高于阈值时, λ 对激光场的涨落影响变小. 这同从图1到图3得到的结论是一致的.

结 论 通过一维激光模型, 本文从理论上分析了加性和倍增噪声之间有耦合作用的单模激光的统计涨落, 算出了耦合系数 $\lambda = 1$ 时定态激光强度的平均值 $\langle I \rangle$ 、归一化强度方差 $\lambda_2(0)$ 和偏斜度 $\lambda_3(0)$ 的值, 并讨论了噪声之间的耦合对 $\langle I \rangle$ 、 $\lambda_2(0)$ 和 $\lambda_3(0)$ 的影响. 对在远低于阈值条件下工作的激光, $\lambda > 0$ 时, 在 $\lambda_2(0)$ 和 $\lambda_3(0)$ 中引起的涨落要比 $\lambda = 0$ 时大得多. 而在远

高于阈值条件下工作的激光, $\lambda_2(0)$ 和 $\lambda_3(0)$ 中的涨落受 λ 的影响较小.

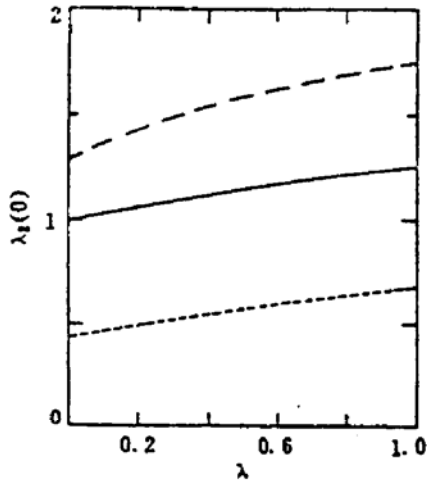


Fig. 5 The normalized variance $\lambda_2(0)$ of the laser intensity as a function of λ . The parameters are the same as those in Fig. 4

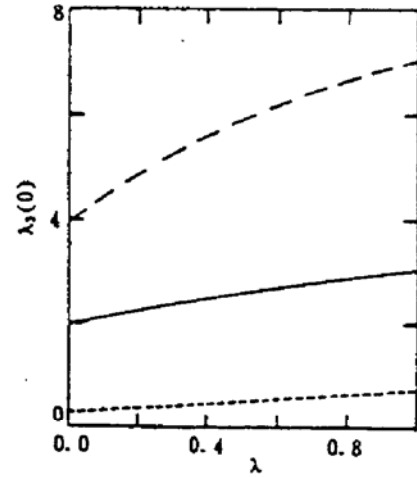


Fig. 6 The normalized skewness $\lambda_3(0)$ as a function of λ . The parameters are the same as those in Fig. 4

参 考 文 献

- [1] M. R. Young, S. Singh, Statistical properties of a laser with multiplicative noise. *Opt. Lett.*, 1988, **13**(1): 21~23
- [2] M. R. Young, S. Singh, Effects of multiplicative white noise on laser light fluctuations. *Phys. Rev. A*, 1988, **38**(1): 238~244
- [3] Shiqun Zhu, Effects of multiplicative white and colored noise in dye laser theory. *Phys. Rev. A*, 1990, **41**(3): 1689~1694
- [4] Shiqun Zhu, White noise in dye-laser transients. *Phys. Rev. A*, 1990, **42**(9): 5758~5761
- [5] Shiqun Zhu, Saturation effects in a laser with multiplicative white noise. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(5): 3210~3215
- [6] A. Fulinski, T. Telejko, On the effect of interference of additive and multiplicative noises. *Phys. Lett. A*, 1991, **152**(1~2): 11~14
- [7] H. Risken, *The Fokker-Planck equation*. Beilin, Springer-Verlag, 1984)
- [8] 数学手册, 北京, 高等教育出版社, 1979: 620

Effect of Coupling Between Noises on One Dimensional Laser Field

Zhu Shiqun Yin Jianping Chen Yuhua

(Department of Physics, Suzhou University, Suzhou 215006)

(Received 21 July 1993; revised 5 October 1993)

Abstract The effect of coupling between additive and multiplicative noises on the one dimensional laser model is investigated. The analytic form of the steady state laser intensity distribution function is obtained. Compared with the laser model with independent noise, the coupling between noises enhances the fluctuations of laser intensity.

Key words additive noise, multiplicative noise, coupling, fluctuation.