

相干态 Jaynes-Cummings 模型中场的 振幅 N 次方压缩

王继锁 王传奎 孙金祚

(聊城师范学院光通信研究所, 山东 252059)

(中国高等科学技术中心(世界实验室))

摘 要 研究了一初始处于基态的二能级原子与相干态光场相互耦合的单光子 Jaynes-Cummings (J-C)模型中场的振幅 N 次方压缩特性, 并讨论了其压缩度随光场的初始平均光子数 \bar{n} 和压缩阶数 N 的变化.

关键词 J-C 模型, 相干态, 振幅 N 次方压缩.

1 引 言

近年来光场的非经典特性受到了人们的极大关注, 其中压缩效应尤其受到重视. 除了通常的压缩效应外, Hong 和 Mandel^[1] 首先扩大了光场压缩的含义, 提出了光场高阶压缩的概念. 接着 Hillery 提出了另一类高阶压缩的概念——光场振幅平方压缩效应^[2], 它不等价于 Mandel 所定义的高阶压缩. 最近 Zhang 等人推广了 Hillery 工作, 提出了振幅 N 次方压缩^[3], 这种非经典效应广泛存在于非线性光学过程中, 且它与通常的压缩以及 Mandel 的高阶压缩效应是相互独立的.

众所周知, 描述一个二能级原子与单模量子场的单光子相互作用的 J-C 模型^[4]是精确可解的. 这模型可展示许多量子效应, 如真空场的拉比(Rabi)振荡^[5]、原子反转的崩溃和回复现象^[6]、原子偶极压缩^[7]、辐射场的通常压缩^[8]等. 特别是自 Rempe 等人在实验上成功地证实了这一模型, 并观测到原子反转的量子崩溃和回复现象^[9]以来, 使得人们对 J-C 模型的研究不再仅仅有理论上的意义, 而且具有实际价值. 最近 Mahran 等人^[10]研究了单光子 J-C 模型中场的振幅平方压缩性质, 作者在前文^[11]中研究了真空态多光子 J-C 模型中场的振幅 N 次方压缩特性. 然而到目前为止还未曾有人讨论过单光子 J-C 模型中场的振幅 N 次方压缩. 本文以相干态 J-C 模型为例, 研究在这种单光子 J-C 模型中辐射场的振幅 N 次方压缩问题.

2 振幅 N 次方压缩的定义

考虑一频率为 ω 的单模辐射场, 定义两个可测量即两个厄米算符:

$$Z_1(N) = (A^{+N} + A^N)/2, \quad Z_2(N) = i(A^{+N} - A^N)/2, \quad (1)$$

它们分别表示光场复振幅 N 次幂的实部和虚部. 式中 $A = \exp(i\omega t)a$, $A^+ = \exp(-i\omega t)a^+$ 为两个缓变算符, a 和 a^+ 分别为光子的湮灭和产生算符. 容易证明, 算符 Z_1 和 Z_2 满足对易关系和测不准关系

$$[Z_1(N), Z_2(N)] = i[A^N, A^{+N}]/2, \quad (2)$$

$$\Delta Z_1^2 \Delta Z_2^2 \geq \frac{1}{16} |\langle [A^N, A^{+N}] \rangle|^2 \quad (3)$$

如果 $\langle \Delta Z_i^2 \rangle < \frac{1}{4} \langle [A^N, A^{+N}] \rangle$, ($i = 1, 2$) (4)

成立, 则称光场存在振幅 N 次方压缩效应. 可以证明, 在(4)式意义下的光场是非经典的^[12], 然而它不同于 Hong 和 Mandel 所定义的高阶压缩, 而是光场的又一新的非经典效应^[13].

为了表征光场振幅 N 次方的压缩程度, 定义振幅 N 次方的压缩度为

$$D_i(N) = \frac{4\langle \Delta Z_i^2 \rangle - \langle [A^N, A^{+N}] \rangle}{\langle [A^N, A^{+N}] \rangle}, \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

式中 $-1 \leq D_i(N) < 0$ 表示光场在 Z_i 分量上存在振幅 N 次方压缩效应, $D_i(N)$ 的大小反映其被压缩的程度. 由(1)式也可将(5)式表示成为

$$\left. \begin{aligned} D_1(N) &= \frac{2\langle A^{+N}A^N \rangle + \langle A^{+2N} + A^{2N} \rangle - \langle A^{+N} + A^N \rangle^2}{\langle [A^N, A^{+N}] \rangle}, \\ D_2(N) &= \frac{2\langle A^{+N}A^N \rangle - \langle A^{+2N} + A^{2N} \rangle + \langle A^{+N} - A^N \rangle^2}{\langle [A^N, A^{+N}] \rangle}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

3 相干态 J-C 模型中场的振幅 N 次方压缩特性

对于二能级单光子 J-C 模型, 若初始时刻原子处于基态 $|-\rangle$, 而场处于相干态 $|\alpha\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\alpha) |n\rangle, \quad (7)$$

$$F_n(\alpha) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (8)$$

式中 $\alpha = \bar{n}^{1/2} \exp(i\varphi)$, \bar{n} 为光场的初始平均光子数, φ 为 α 的位相. 那么在共振条件下体系演化到 $t > 0$ 时刻的状态为^[14]:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\alpha) \exp\left[-i(n - \frac{1}{2})\omega t\right] \cos(gt \sqrt{\bar{n}}) |-, n\rangle \\ &\quad - i \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha) \exp\left[-i(n - \frac{1}{2})\omega t\right] \sin(gt \sqrt{\bar{n}}) |+, n-1\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

式中各量的物理意义同文献[14]. 不难求得, 在态(9)式下有关算符的态平均值分别为:

$$\begin{aligned} \langle A^{+N} + A^N \rangle &= 2e^{-\bar{n}} \cos(N\varphi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{(2n+N)/2}}{n!} \cos(gt \sqrt{\bar{n}}) \cos(gt \sqrt{\bar{n} + N}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^{(2n+N)/2}}{n!} \frac{n}{n+N} \sin(gt \sqrt{\bar{n}}) \sin(gt \sqrt{\bar{n} + N}) \right], \\ \langle A^{+N} - A^N \rangle &= -i2e^{-\bar{n}} \sin(N\varphi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{(2n+N)/2}}{n!} \cos(gt \sqrt{\bar{n}}) \cos(gt \sqrt{\bar{n} + N}) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^{(2n+N)/2}}{n!} \sqrt{\frac{n}{n+N}} \sin(gt \sqrt{n}) \sin(gt \sqrt{n+N})], \\
 \langle A^{+2N} + A^{2N} \rangle & = 2e^{-\bar{n}} \cos(2N\varphi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{N+N}}{n!} \cos(gt \sqrt{n}) \cos(gt \sqrt{n+2N}) \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n+N}}{n!} \sqrt{\frac{n}{n+2N}} \sin(gt \sqrt{n}) \sin(gt \sqrt{n+2N}) \right], \\
 \langle A^N A^{+N} \rangle & = e^{-\bar{n}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n!)^2} (n+N)! \cos^2(gt \sqrt{n}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^n (n+N-1)!}{n!(n-1)!} \sin^2(gt \sqrt{n}) \right], \\
 \langle A^N A^{+N} \rangle & = e^{-\bar{n}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{(n-N)!} \cos^2(gt \sqrt{n}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n(n-N-1)!} \sin^2(gt \sqrt{n}) \right].
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

将(10)式代入(6)式并借助于数值计算,可得到压缩度 $D_1(N)$ 或 $D_2(N)$ 的时间演化规律. 如图 1 所示. 图 1 给出了当入射光场取不同初始平均光子数 \bar{n} 时,且当 $\varphi = 0$ 时, $D_1(3)$ (即对应于光场的三阶压缩——振幅立方压缩效应)随 gt 的变化曲线. 从图 1 可以看出,对于本文所研究的系统,光场一开始便可呈现振幅立方压缩效应,即无需时间延迟;当入射光场的初始平均光子数 \bar{n} 很小时,所呈现出的振幅立方压缩较弱,且随 gt 呈无严格周期的振荡行为,即一开始出现振幅立方压缩效应,而后消失,然后再出现、再消失... (见图 1(a)); 另外当 $\bar{n} < 1$ 时,出现第一次振幅立方压缩的强度将随 \bar{n} 的增加而增强(见图 1(b)); 且当 $\bar{n} \approx 1$ 时所出现的第一次振幅立方压缩将达到最大值(见图 1(c)); 当 \bar{n} 较大时(例如 $\bar{n} = 4$),随着时间的演化,在较长的时间范围内 ($gt < 50$) 振幅立方压缩只出现两次(见图 1(d)),且出现第一次振幅立方压缩效应的强度较弱、时间也较短,而出现第二次振幅立方压缩效应的强度较大、时间也较长,并且第二次出现的强度和ación时间将随 \bar{n} 的增大而明显地增加(见图 1(e)). 由此可见,要想在较长的时间内观测到更为有效的振幅立方压缩效应,对于本文所研究的系统,必须加大入射光场的初始平均光子数 \bar{n} .

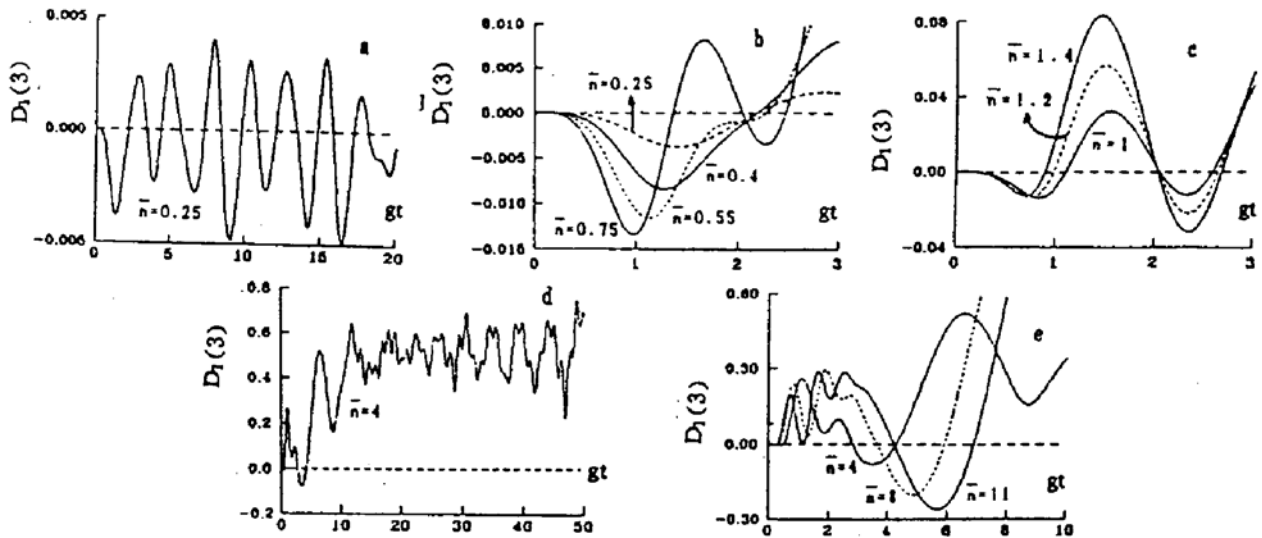


Fig. 1 Time evolution of $D_1(3)$

图 2 给出了当入射光场的初始平均光子数 \bar{n} 取不同值且当 $\varphi = 0$ 时 $D_1(4)$ (即对应于光场的四阶压缩——振幅四次方压缩效应)随 gt 的变化曲线. 由图 2 可以看出,当 \bar{n} 取不同值时 $D_1(4)$ 的时间演化规律与上面 $D_1(3)$ 的时间演化规律基本相同,所不同之处仅在于 $\bar{n} \approx 2$ 时第

一次出现的振幅四次方压缩效应将达到最大值,而其余的结论与上面对 $D_1(3)$ 的讨论时所得到的结论完全相同,这里不再复述.

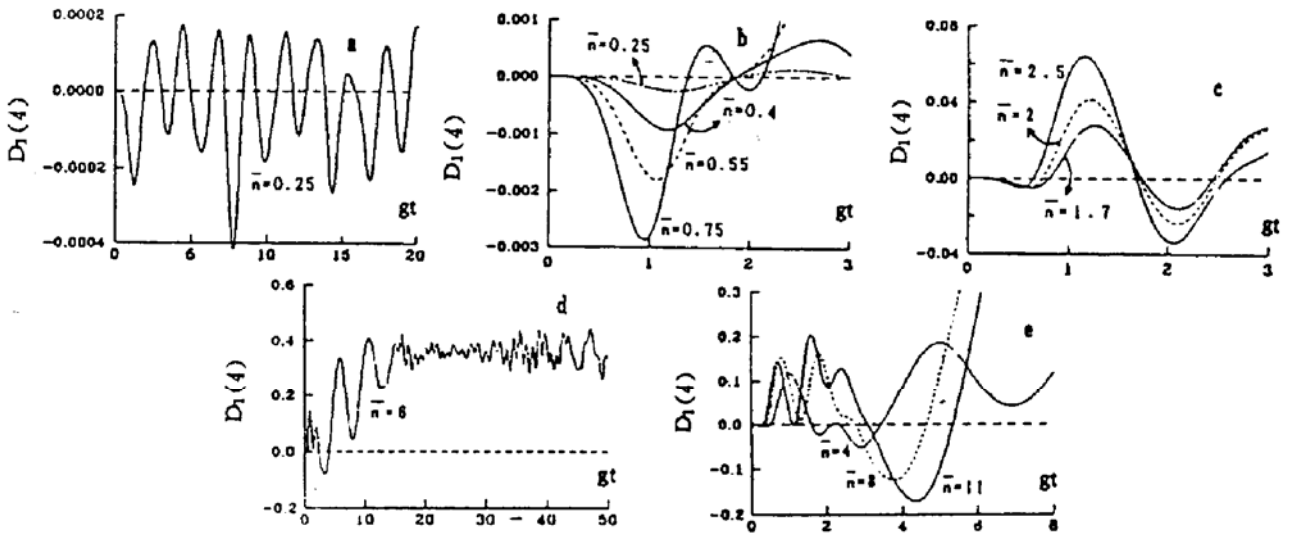


Fig. 2 Time evolution of $D_1(4)$

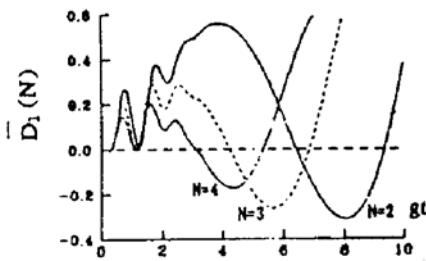


Fig. 3 Time evolution of $D_1(N)$ versus N for the same $\bar{n} = 10$

在图 3 中,给出了当 \bar{n} 取同一值即 $\bar{n} = 10$ 时 $D_1(2)$ 、 $D_1(3)$ 和 $D_1(4)$ 的时间演化规律,这分别对应于振幅平方压缩、振幅立方压缩和振幅四次方压缩的压缩度随 gt 的变化.从图 3 可以看出,当 \bar{n} 较大时,第二次出现振幅各阶压缩的强度和范围将随其压缩阶数 N 的增加而变小.另外从图 3 还可以看出,当 \bar{n} 取同一值(例如 $\bar{n} = 10$)时,光场在 $6.45 < gt < 9.3$ 范围内呈现振幅平方压缩、在 $4.25 < gt < 6.85$ 范围内呈现振幅立方压缩、在 $3.1 < gt < 5.3$ 范围内呈现振幅四次方压缩,

即这时光场在 $6.85 < gt < 9.3$ 范围内只呈现振幅平方压缩,在 $6.45 < gt < 6.85$ 范围内不但呈现振幅平方压缩而且同时还呈现振幅立方压缩,在 $5.3 < gt < 6.45$ 范围内只呈现振幅立方压缩,在 $4.25 < gt < 5.3$ 范围内不但可呈现振幅立方压缩而且同时还可呈现振幅四次方压缩,而在 $3.1 < gt < 4.25$ 范围内光场只呈现振幅四次方压缩效应.由此可揭示出不同阶数的振幅高次方压缩效应之间是相互独立的和不等价的.

结 论 本文研究了一初始处于基态的二能级原子与相干态光场相互耦合的单光子 J-C 模型中场的振幅高次方压缩特性,并讨论了入射光场的初始平均光子数对它们的影响.由本文的讨论可知,要想在较长的时间范围内观测到更为有效的振幅高次方压缩效应,对于本文所研究的系统,加大入射光场的初始平均光子数是一个有效途径.此外,应用本文的方法,还可以对其它不同初始光场下的振幅高次方压缩特性进行研究,则将另文报道.

参 考 文 献

- [1] C. K. Hong, L. Mandel, Higher-order squeezing of a quantum field. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **54**(4) : 323~325
- [2] M. Hillery, Squeezing of the square of the field amplitude in second harmonic generation. *Opt. Commun.*, 1987, **62**(2) : 135~138
- [3] Z. Zhang, L. Xu, J. Chai *et al.*, A new kind of higher-order squeezing of radiation field. *Phys. Lett. (A)*, 1990, **A150**(1) : 27~30
- [4] E. T. Jaynes, F. E. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, 1963, **51**(1) : 89~109
- [5] G. S. Agarwal, Vacuum-field Rabi oscillations of atoms in a cavity. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1985, **B2**(3) : 480~485
- [6] N. B. Narozhny *et al.*, Coherence versus incoherence, Collapse and revival in a simple quantum model. *Phys. Rev. (A)*, 1981, **A23**(1) : 236~247
- [7] P. Zhou, J. S. Peng, Dipole squeezing in the two-photon Jaynes-Cummings model with superposition state preparation. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **A44**(5) : 3331~3335
- [8] P. Meystre, M. S. Zubairy, Squeezed states in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Lett. (A)*, 1982, **A89**(8) : 390~392
- [9] G. Rempe, H. Walther, N. Klein, Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(4) : 353~356
- [10] M. H. Mahran, A. -S. F. Obada, Amplitude-squared squeezing of the Jaynes-Cummings model. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **A40**(8) : 4476~4480
- [11] 王继锁, 孙金祚, 王传奎等, 真空态多光子 Jaynes-Cummings 模型中场的振幅 N 次方压缩. *光学学报*, 1993, **13**(12) : 1096~1099
- [12] S. Du, C. Gong, Squeezing of the k th power of the field amplitude. *Phys. Lett. (A)*, 1992, **A168**(4) : 296~300
- [13] 王继锁, 孙金祚, 王传奎, 光场高阶压缩的独立性. *量子电子学*, 1992, 9(增刊) : 9~10
- [14] 周 鹏, 彭金生, 多光子 Jaynes-Cummings 模型的演化. *光学学报*, 1990, **10**(9) : 837~844

The N th-Power Squeezing of Field Amplitude in the Coherent State One-Photon Jaynes-Cummings Model

Wang Jisuo Wang Chuankui Sun Jinzuo

(*Institute of Optical Communication, Liaocheng Teachers' College, Shandong 252059*)

(Received 11 January 1994; revised 14 March 1994)

Abstract The properties of the N th-power squeezing of field amplitude in the one-photon Jaynes-Cummings model of an atom initially in the ground state coupling with the coherent state are investigated in this paper. The variations of the degree of the squeezing with the initial average photon numbers of field and the power of N are discussed.

Key words Jaynes-Cummings model, coherent state, amplitude N th-power squeezing.