

# 分析各向异性光波导的一种新系统

赵安平 于荣金

(中国科学院长春物理研究所, 长春 130021)

Srba R. Cvetkovic

(Department of Electrical Engineering and Electronics Brunel-The University of West London  
Uxbridge, Middlesex UB8 3PH England, United Kingdom)

**摘 要** 报道一种灵活、交互和自动化的系统, 它以矢量有限元法为基础, 并在 IMSL 的 PDE/protran 题解环境中实现. 用它分析各向异性光波导, 得到了各向异性介质矩形波导中所有传播模式的数值结果, 以及采用传播常数和模场分布二种形式评价这个方法的精度, 并与早期的研究结果加以比较.

**关键词** 各向异性, 光波导.

## 1 引 言

任意形状、非均匀和(或)各向异性的波导结构, 由于它们的复杂性, 大部分没有解析解. 而最有效和灵活的数值方法之一的有限元法, 或许是解这类问题的最佳选择<sup>[1~3]</sup>.

由 Sewell<sup>[4]</sup> 开发的一个通用有限元包(称为 PDE/protran), 但是首先必须把它们转换成 PDE/protran 需要的形式. 如果用交互的接口驱动器实现这个转换, 转换过程就可大大简化. Sewell 和 Cvetkovic<sup>[5]</sup> 利用称为 WAVEGIDE 的交互驱动器, 把 PDE/protran 软件应用于微波和光波导问题, 他们也发展了接口. 其应用以不均匀各向同性波导为例, 并用轴向分量( $E_z$ ,  $H_z$ )表示法进行求解. 这个方法也应用于分析条形多层波导<sup>[6]</sup>, 结果与其它有限元法相比, 是完全一致的.

本文进一步把 WAVEGIDE 程序扩大到可以分析各向异性介质波导. 一旦由 WAVEGIDE 把各向异性介质波导问题转换成某一表示法[轴向分量( $E_z$ ,  $H_z$ ), 单一分量( $E_z$  或  $H_z$ ), 二个分量( $E_x$ ,  $E_y$ ) 或 ( $H_x$ ,  $H_y$ ), 以至三个分量( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ) 或 ( $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$ ) 表示法]的 PDE/protran 形式, PDE/protran 处理机就可轻易地和很快地解出这个问题. 文中提出用传播常数和模场分布两种形式来全面评价本方法. 数值结果还表明: 利用高阶元的有限元网格(即网格精炼), 不仅改善了数值结果(特别是场分布)的精度, 而且也消除了伪解. 消除伪解过去已引入了几种大家熟知的方法, 如利用拉格朗日乘子, 对给定界面明确强加横向场的连续性<sup>[7]</sup>; 利用罚函

数<sup>[8]</sup>; 把良导体的边界条件应用于对称平面的介质波导<sup>[9]</sup>; 以及利用条件  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  或  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ <sup>[10]</sup>. 从用户的观点来看, 本文的消除伪解的方法可能是更有效的.

## 2 数值方法

### 2.1 基本方程

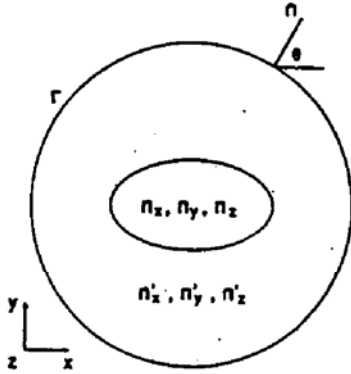


Fig. 1 General geometry of the problem

考虑 X-Y 平面内电导边界为  $\Gamma$  的任意截面的一个三维不均匀各向异性介质波导, 如图 1 所示. 此波导的电容率张量 $[\epsilon]$ 可写成:

$$\epsilon_i = \epsilon_0 n_i^2 \quad (1)$$

式中  $i = x, y, z$ ,  $\epsilon_0$  为自由空间的电容率,  $n$  为每种介质的折射率. 略去时间函数  $\exp(j\omega t)$ , 麦克斯韦方程为<sup>[9]</sup>:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon_0 [\mathbf{k}] \cdot \mathbf{E} \quad (2)$$

式中  $\omega = 2\pi f$  为角频率 ( $f$  是频率),  $\mu_0$  为自由空间的磁导率,  $[\mathbf{k}]$  为相对电容率张量, 即  $[\mathbf{k}] = [\epsilon]/\epsilon_0$ .

在这样一个各向异性介质波导结构中混合传播模的轴向电/磁场 ( $E_z, H_z$ ) 分量公式为

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + j\omega \mu_0 H_z = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - j\omega \epsilon_z E_z = 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -j \left( \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} + \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) / (\omega^2 \mu_0 \epsilon_x - \beta^2), & E_y &= j \left( \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} - \beta \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) / (\omega^2 \mu_0 \epsilon_y - \beta^2), \\ H_x &= j \left( \omega \epsilon_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) / (\omega^2 \mu_0 \epsilon_x - \beta^2), & H_y &= -j \left( \omega \epsilon_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) / (\omega^2 \mu_0 \epsilon_x - \beta^2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中  $\beta$  为模式在传播方向 ( $Z$ ) 的传播常数.

### 2.2 边界条件

在 (2) 式或 (3) 式中, 节点的电磁场应该满足图 1 中  $\Gamma$  的边界条件. 对于理想的电导体, 边界条件是  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$  和  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$ <sup>[9~11]</sup>, 它们可以写成

$$E_x = \cos \theta E_y, \quad \text{和} \quad E_z = 0, \quad H_x = -\tan \theta H_y \quad (5)$$

对于理想的磁导体, 边界条件是  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$  和  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$ <sup>[9~11]</sup>, 它们可以写成

$$E_x = -\tan \theta E_y, \quad H_x = \cos \theta H_y, \quad \text{和} \quad H_z = 0 \quad (6)$$

式中垂直于  $\Gamma$  的单位矢量  $\mathbf{n}$  位于图 1 中 X-Y 平面内离 X 轴  $\theta$  角处. 方程 (5) 和 (6) 中的边界条件可用来得到具有对称平面介质波导结构中传播模式的色散关系.

### 2.3 IMSL 的 PDE/protran 软件

IMSL 的 PDE/protran 软件是一种有限元解系统, 它有灵巧的每步处理和后处理机, 可以求解二维区域偏微分方程描述的各种问题. 一旦把问题表示成下列 PDE/protran 所需的形式:

$$\frac{\partial}{\partial x} A_i \left( U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x}, \frac{\partial U_i}{\partial y}, \beta \right) + \frac{\partial}{\partial y} B_i \left( U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x}, \frac{\partial U_i}{\partial y}, \beta \right) + F_i(\beta, U_i) = 0, \quad (7)$$

则该问题就可在灵巧环境下简单而迅速地表示出来. 式中  $U_i$  是未知函数,  $i$  可从 1 到 9, PDE/protran 最多可用 9 个方程解一个问题.  $\beta$  是问题的本征值.

把方程 (7) 与方程 (3)、(4) 比较, 可得到 ( $E_z, H_z$ ) 形式的公式与 PDE/protran 所需形式之

间的下述关系:

$$U_1 = H_z, \quad U_2 = E_z \text{ (或 } F_1 = j\omega \mu_0 H_z, F_2 = -j\omega \varepsilon_z E_z); \quad (8a)$$

$$A_1 = E_y, \quad B_1 = E_z, \text{ 和 } A_2 = H_y, \quad B_2 = H_z \quad (8b)$$

为了实现 PDE/protran 软件, 用户只需要把作为  $\beta$  和  $U_i$  函数的  $A_i$ 、 $B_i$ 、 $F_i$  表达式以及波导结构参数, 通过 WAVEGIDE 程序<sup>[5]</sup>的交互“问答”会话输入 PDE/protran 软件, 然后利用逆幂法, PDE/protran 就自动计算出本征值 ( $\beta$ ) 和本征矢 ( $U_i$ ).  $A_i$  和  $B_i$  值与  $U_i$  同时算出并存入. 最后, 在用户得到波导问题解的同时, PDE/protran 软件将自动产生  $E_z$  和  $H_z$  的等值线(或表面)图、 $(E_z, E_y)$  和  $(H_z, H_y)$  的矢量场图. 由于 PDE/protran 使用伽辽金有限元法, 它不需要显式界面条件, 能处理不同材料之间的界面处  $\varepsilon$  和(或) $\mu$  是不连续的复合介质. 此外, PDE/protran 的另一个重要优点是, 它对单元的阶次有三种选择(二次元、三次元和四次元), 并且用单一指令, 例如把

ORDER OF ELEMENTS = 2, 3, 或 4

打印进程序, 以交互“问答”会话方式阶次就可自动改变, 用户不需要再做任何公式化工作. 因此, PDE/protran 可使用户简便地得到较精确的数值结果, 而且容易研究不同次元对数值结果的影响.

#### 2.4 用 PDE/protran 软件解本征值问题

PDE/protran 可以解如(3)式的本征值问题, 只要把它们化成  $AX = \lambda BX$  形式的矩阵本征值问题, 并利用逆幂法解离散矩阵问题. 如果把“随机”非零右边引入(3)式, 并在数值 ( $BMIN, BMAX$ ) 范围内改变  $\beta$ , 当  $\beta$  接近本征值时, 解在数值上就变成无限大. 利用这个事实, 可以找出给定  $\beta$  范围内的所有本征值.

WAVEGIDE 要求用户提供一个频率  $f$  和对  $\beta$  的限制 ( $BMIN, BMAX$ ). 对于给定的  $\beta$  值, WAVEGIDE 求解具有非零右边的(3)式, 返回一个函数值  $g(\beta)$ ,  $g(\beta)$  代表解的某范数的倒数. WAVEGIDE 利用下列过程找出 ( $BMIN, BMAX$ ) 中  $g(\beta)$  的所有最小值: 以  $BMIN$  和  $BMAX$  之间具有均匀间隔  $\beta$  值的用户指定数 ( $NINTER$ ) 求出  $g(\beta)$ . 当发现一个下标  $i$  使  $g(\beta)$  既小于  $g(\beta_{i-1})$  又小于  $g(\beta_{i+1})$  时, 寻找  $(\beta_{i-1}, \beta_{i+1})$  中  $g$  的最小值, 利用公用域子程序  $FMIN$ <sup>[12]</sup> 准确找出最小值. 用户也可提供一个  $\beta$  值和对  $f$  的限制, 在这种情况下, WAVEGIDE 找出相当于传播模式的频率值; 如果提供一个  $\beta = 0$  的值, 由此找出的频率就是截止频率.

### 3 数值计算结果和讨论

作为本方法的一个应用, 可以考虑具有二个对称平面的各向异性介质矩形波导, 芯的寻常折射率和非常折射率分别为  $\sqrt{2.31}$  和  $\sqrt{2.19}$ , 芯由折射率为  $\sqrt{2.05}$  的各向同性介质包围<sup>[10, 13]</sup>. 由于这种对称性, 可以只分析矩形波导截面的四分之一, 并把它再分成图 2 所示的三次三角元, 其中  $W$  和  $t$  分别是矩形芯的宽度和厚度. 为了得到所有高阶模, 网格选择得较密(三角元数  $N_E = 192$ ). 此外, 在分析中假定边界  $CD$  和  $DA$  都是理想电导

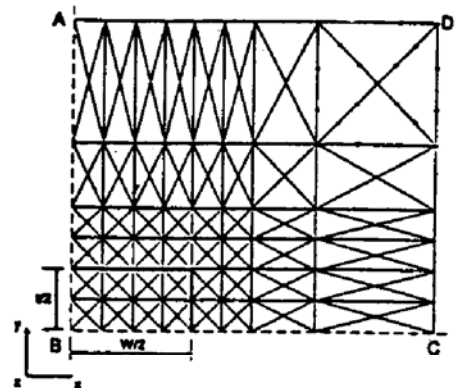


Fig. 2 FE grid with third-order triangular elements for an anisotropic dielectric rectangular waveguide

体. 表 1 给出了边界  $AB$  和  $BC$  (对称平面) 的边界条件, 它是由 (5) 式和 (6) 式代入 (4) 式得到的. 表 1 也列出了相应于附录中所有其它公式的边界条件.

Table 1. Boundary condition for an anisotropic dielectric rectangular waveguide

Boundaries		$AB$	$BC$
$\theta$		$180^\circ$	$270^\circ$
boundary conditions	$E$ ; perfect electric conductor	$E_y = 0, H_x = 0;$ $E_z = 0, \partial H_x / \partial x = 0$	$E_x = 0, H_y = 0;$ $E_z = 0, \partial H_x / \partial y = 0$
	$M$ ; perfect magnetic conductor	$E_x = 0; H_y = 0;$ $\partial E_x / \partial x = 0, H_x = 0$	$E_y = 0, H_x = 0;$ $\partial E_x / \partial y = 0, H_x = 0$
modes	$E_{odd, odd}^x, E_{even, even}^y$	$E$	$M$
	$E_{even, even}^x, E_{odd, odd}^y$	$M$	$E$
	$E_{odd, even}^x, E_{even, odd}^y$	$E$	$E$
	$E_{even, odd}^x, E_{odd, even}^y$	$M$	$M$

图 3 分别表示  $E_{11}^x$  模的  $E_x$  分量等值线图、 $H_x$  分量等值线图、矢量电场 ( $E_x, E_y$ ) 分布和矢量磁场 ( $H_x, H_y$ ) 分布. 图 4 表示  $E_{21}^x$  模的数值结果. 在图 3 和图 4 中,  $F$  为频率 (其中  $F = C_0 / \lambda_0$ ,  $C_0 = 3.0 \times 10^8$  m/s,  $\lambda_0 = 0.6328 \mu\text{m}$ ), 而  $BETA(\beta)$  代表传播常数.  $E_{11}^x$  模有效折射率的平方, 即  $(\beta/K_0)^2$  值, 对于  $E_{11}^x$  模是  $(0.14867 \times 10^8 / K_0)^2 = 2.24192$ . 图 5 表示这种波导所有  $E_{mn}^x$  模的色散特性. 从图中可以看出, 除了高阶模 ( $E_{31}^x, E_{12}^x, E_{22}^x$ ) 的结果外, 本文的结果与以前有限元法的结果<sup>[10, 13]</sup>十分一致. 用低次元<sup>[13]</sup>或低密度网格<sup>[10]</sup>不能得到高阶模的结果, 因此这一部分结果无法作比较.

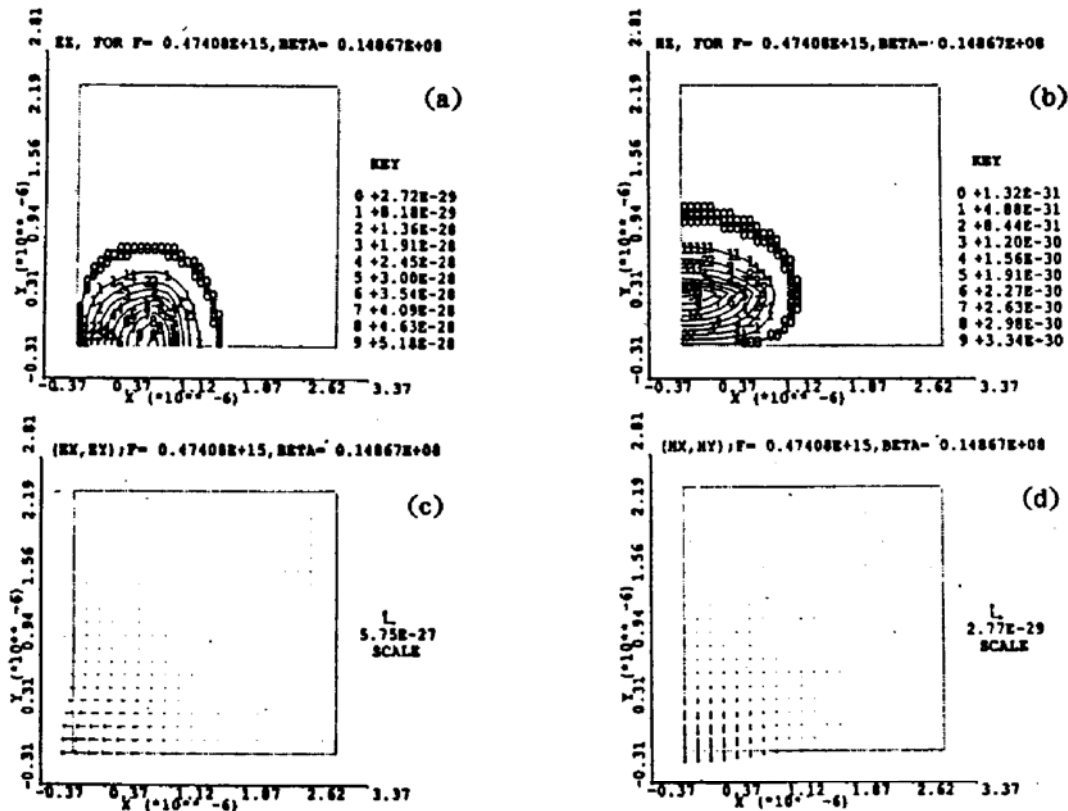


Fig. 3 Electric-/magnetic-field distributions for  $E_{11}^x$  mode. (a) The contour plot of  $E_x$ ; (b) the contour plot of  $H_x$ ; (c) The vector electric-field ( $E_x, E_y$ ) profile; (d) The vector magnetic-field ( $H_x, H_y$ ) profile

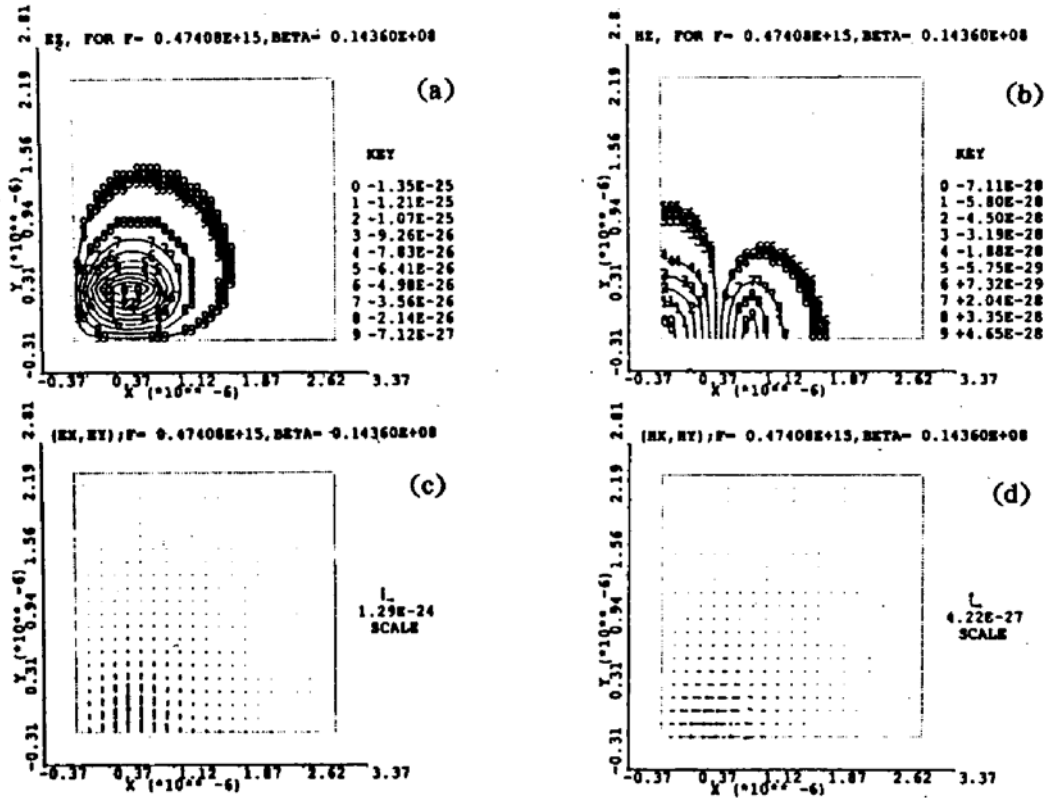


Fig. 4 Electric-/magnetic-field distributions for  $E_{21}$  mode. (a) The contour plot of  $E_z$ ; (b) the contour plot of  $-H_x$ ; (c) The vector electric-field ( $E_x, E_y$ ) profile; (d) The vector magnetic-field ( $H_x, H_y$ ) profile

上面介绍的所有数值计算结果都是三次三角元的网格. 为了对本法精度作一全面评价, 下面研究相同网格、但是用二次元所得的数值计算结果. 表 2 对二次元和三次元网格(分别需要 674 kb 和 3250 kb 存储器)给出了波导(矩形芯厚  $t = 1.0 \mu\text{m}$ )中某些模式的传播常数. 比较表 2 中的传播常数可以发现,  $E_{21}$  模有效折射率( $\beta/K_0$ )的改进是  $2.2 \times 10^{-5}$ , 这个精度对许多设计是足够的. 然而, 如果考查二次元网格得到的  $E_{21}$  模的矢量电场( $E_x, E_y$ )分布(图 6), 并把它与用三次元网格得到的  $E_{21}$  模场分布(图 4(c))比较, 可以清楚地看出用二次元网格得到

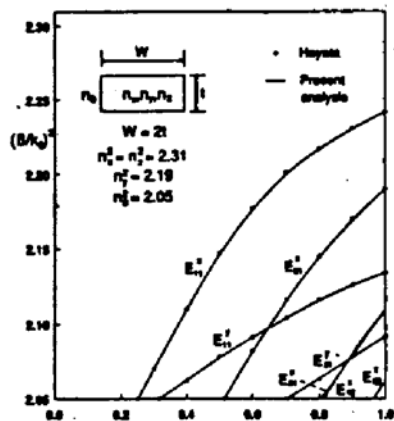


Fig. 5 Dispersion characteristics of an anisotropic dielectric rectangular waveguide

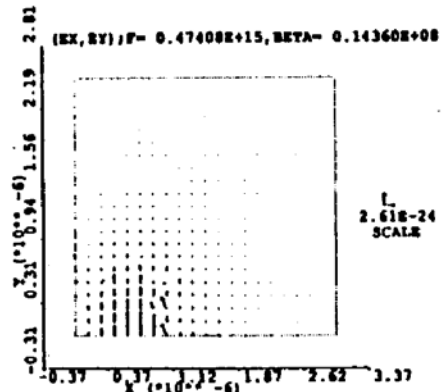


Fig. 6 The vector electric field ( $E_x, E_y$ ) profile of  $E_{21}$  mode for the FE grid with second-order triangular elements

的场分布是不够精确的. 因此, 为了评价任何有限元法的精度, 特别是要用它来计算机辅助设计波导和器件, 传播常数和场分布必需一起考虑, 并且要更多地注意模场分布(特别在高阶模情况下). 最后, 从表 2 也可看出, 由于元的次数增加, 伪解的数目可以减少. 当然, 元次数的增加可等价地看成增加低次有限元网格中元的数目. 而无论在那一种情况下, 网格改变对伪解的影响是相同的.

Table 2. Numerical results for the finite element grid with the second-and third-order triangular elements

boundary conditions	modes	beta	
		second-order elements	third-order elements
AB: M BC: E	$E_{1z}$	0. 1426549E+8	0. 1425946E+8
	$E_{11}$	0. 1450404E+8	0. 1450396E+8
	spurious mode	0. 1466400E+8	—
AB: E BC: E	spurious mode	0. 1422778E+8	—
	$E_{11}$	0. 1435977E+8	0. 1435999E+8
	$E_{12}$	0. 1441789E+8	0. 1441775E+8
	spurious mode	0. 1464227E+8	—

## 4 结 论

可以在强有力的、灵活的 IMSL 的 PDE/protran 解题环境下实现有效、精确、全自动的矢量有限元法, 已用来分析微波和(或)光波导. 最初用于解不均匀各向同性波导的 WAVEGUIDE, 本文已把它扩展到分析不均匀各向异性波导. 第一次以完全的形式给出了这样一种矩形结构中所有混合模式的数值计算结果, 并且对可以用来比较的模式, 得到了极一致的结果. 与其它研究不同, 介绍了以传播常数和模场分布两种形式全面评价本方法的精度. 由于本方法利用了 PDE/protran 软件的本领和灵活性, 所以实现起来比其它有限元技术更快.

## 参 考 文 献

- [1] 赵安平, 于荣金, 改进的光波导标量近似有限元分析. 光学学报, 1989, 9(2): 175~180
- [2] 赵安平, 于荣金, 赵伟等, 具有任意折射率分布圆光纤的标量近似有限元分析. 吉林大学自然科学学报, 1991, (1): 32~36
- [3] 赵安平, 于荣金, 用有效折射率法和有限元法分析多量子阱条形光波导. 光学学报, 1991, 11(8): 720~726
- [4] G. Swell, *Analysis of a finite element; PDE/protran*, Springer-verlag, 1985
- [5] G. Swell, S. R. Cvetkovic, WAVEGUIDE-an interactive waveguide program. *Ins. J. Adv. Eng. Software*, 1989, 11(4): 169~175
- [6] A. P. Zhao, S. R. Cvetkovic, M. Punjani, Analysis of stripe multilayer waveguides with effective index and finite element methods. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1992, QE-28(3): 573~579
- [7] N. Mabaya, P. E. Lagasse, P. Vandenbulcke, Finite element analysis of optical waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, 1981, MTT-29(6): 600~605
- [8] B. M. A. Rahman, J. B. Davies, Penalty function improvement of waveguide solution by finite-element. *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, 1984, MTT-32(8): 922~928

- [9] M. Koshiha, K. Hayata, M. Suzuki, Improved finite-element formulation in terms of the magnetic field vector for dielectric waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, 1985, **MTT-33**(3): 227~233
- [10] K. Hayata, M. Koshiha, M. Suzuki, Vectorial finite-element method without any spurious solutions for dielectric waveguiding problems using transverse magnetic field component. *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, 1986, **MTT-34**(11): 1120~1124
- [11] B. M. A. Rahman, J. B. Davies, Finite-element analysis of optical and microwave waveguide problems. *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, 1984, **MTT-32**(1): 20~28
- [12] G. Forsythe, M. Malcolm, C. Moler, *Computer Method for Mathematical Computations*, Prentice-Hall, 1977
- [13] W. C. Chew, M. A. Nasir, A variational analysis of anisotropic inhomogeneous dielectric waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, 1989, **MTT-37**(4): 661~668

## A Novel System for Analysis of Anisotropic Waveguides

Zhao Anping Yu Rongjin

(Changchun Institute of Physics, Academia Sinica, Changchun 130021)

Srba R. Cvetkovic

(Department of Electrical Engineering and Electronics Brunel-The University of West London  
Uxbridge, Middlesex UB8 3PH England, United Kingdom)

(Received 18 January 1993; revised 8 March 1993)

**Abstract** This paper reports an flexible, interactive and automatic system, based on the vector finite element method, and implemented within IMSL's PDE/Protran problem solving environment. Numerical results for all propagating modes in an anisotropic dielectric rectangular waveguide are presented and verified through comparison with an earlier study (where, in fact, fewer modes were found). Furthermore, in comparison with other studies, the evaluation of accuracy of the method is demonstrated in terms of both propagation constants as well as modal field profiles. These results also clearly illustrate the speed and the ease of use of the modified WAVEGUIDE program.

**Key words** anisotropic, waveguide.