

一种基于 Zernike 多项式的波前探测和 重构方法*

魏学业 俞 信

(北京理工大学工程光学系, 北京 100081)

摘 要 运用 Noll 建议的 Zernike 多项式形式表征经大气扰动的波面, 求出由两个离焦面上的光强分布决定的 Zernike 多项式的前 n 项在特定的探测器上的响应矩阵 R . 由 R 和输入的随机波面在两个离焦面上的光强分布, 可方便地求出其 Zernike 多项式的系数, 从而实现了波前的探测和重构. 采用光线追迹的方法, 用计算机模拟验证了这种方法的原理和可行性.

关键词 自适应光学, Zernike 多项式, 光线追迹, 光强分布, 波前重构

1 引 言

自适应光学是利用环境信息主动改进光学质量的科技领域, 是降低大气湍流引起的图像模糊的一门新技术, 它可实时探测和校正大气湍流引起的波前误差. 目前自适应光学系统中, 广泛使用的波前传感器是 Shack-Hartmann 传感器和横向剪切干涉仪^[1], 它们测量的是波前斜率, 通过复杂的重构算法才能实现波前的重构, 利用这种方法重构速度较慢^[2].

Roddiar 于 1987 年提出了一种新的波前传感器-波前曲率传感器, 它以测量波前在光瞳内部的局部曲率和边缘的法向斜率代替测量波前的斜率, 其输出信号为波前的重构提供了足够的信息. 其优点是若和双压电晶体变形镜或者薄膜变形镜配合使用, 可省去专用的波前重构器, 从而使控制简单, 速度加快. 但是, 这种传感器的输出信号与探测器阵列的几何配置形状有关, 在探测波前边缘的法向斜率时引入较大的误差, 难以直接解泊松方程来重构波面. 波前曲率传感器的另一个缺点是只适于校正大气湍流引起波面误差的低阶模式^[3~5].

本文提出了一种基于 Zernike 多项式和离焦面上光强分布的波前探测和重构方法. 其要点为: 利用 Noll 建议的 Zernike 多项式形式表征经大气扰动的波面, 求出该多项式的前 n 项在两个离焦面上的光强分布, 获得这种传感器对置于离焦面处的特定的探测器阵列的响应矩阵; 运用响应矩阵和随机输入波面在两个离焦面上的光强分布, 可快速求出 Zernike 多项式的系数, 从而实现随机波前的探测和重构. 与曲率传感器比较, 此种方法虽亦通过两个离焦面上的光强分布探测和重构入瞳处的光波面, 但对信号的诠释不同, 由此克服了曲率传感器

* 国家 863 高科技计划资助项目.

收稿日期: 1993 年 5 月 24 日; 收到修改稿日期: 1993 年 7 月 19 日

处理光瞳边缘法向斜率的困难, 而且可实现较高阶次模式的重构或校正. 此外, 在求解离焦面上的光强分布时, 不采用通常的快速傅里叶变换或直接衍射积分的方法^[6,7], 而是利用了简洁的光线追迹法及由此获得的点列图, 计算速度快, 要求的计算机内存不大, 具有更好的实用性. 文中给出了此种方法的传感器的配置, 基本原理及计算机模拟结果.

2 基本原理

2.1 Noll 提出的 Zernike 多项式并经大气扰动的光学波前的表征

经大气扰动的光学波前是可以被认为是符合 K-L 谱的二维函数, 这些函数能分解为相互独立的 Zernike 多项式, 本文使用 Noll^[8] 提出的形式.

$$Z_{even, j} = \sqrt{\frac{n+1}{2}} R_n^m(r) \cos(m\theta), \quad m \neq 0$$

$$Z_{odd, j} = \sqrt{\frac{n+1}{2}} R_n^m(r) \sin(m\theta), \quad m \neq 0$$

$$Z_j = \sqrt{n+1} R_n^0(r), \quad m = 0$$

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2 - s]! [(n-m)/2 - s]!} r^{n-2s}$$

表 1 列出 Zernike 多项式的前 10 项(按 $Z_j|_{\max} = 1$ 列出, Z_1 未列出)和它们的一阶偏导数. 经大气扰动的光瞳处的输入波面 $Z(r)$ 可描述为 $Z(r) = \sum_{i=2}^n a_i z_i(r)$, 其中 $z_i(r)$ 为 Zernike 多项式的各子项.

Table 1. Analytic expressions of the Zernike polynomials and their first derivatives

polynomials number	expression	Z_x	Z_y
z_2	x	1	0
z_3	y	0	1
z_4	$2(x^2 + y^2) - 1$	$4x$	$4y$
z_5	$2xy$	$2y$	$2x$
z_6	$x^2 - y^2$	$2x$	$-2y$
z_7	$y[3(x^2 + y^2) - 2]$	$6xy$	$3x^2 + 9y^2 - 2$
z_8	$x[3(x^2 + y^2) - 2]$	$9x^2 + 3y^2 - 2$	$6xy$
z_9	$y(3x^2 - y^2)$	$6xy$	$3(x^2 - y^2)$
z_{10}	$x(x^2 - 3y^2)$	$3(x^2 - y^2)$	$-6xy$

2.2 传感器配置及 S 信号输出

传感器的原理光路示于图 1 中. 其中透镜 L_1 的焦距为 f , 场镜 L_2 的焦距为 $f/2$, 场镜置于 L_1 的焦平面 F 处. 波前传感器原理上由两个探测器组成, 一个探测器探测 P_1 平面上的光强分布 I_1 , 它在焦平面 F 的前方, 另一个探测器探测 P_2 平面上的光强分布 I_1 , 它在焦平面 F 的后方. 两个探测器与焦平面 F 的距离均为 l . 设入瞳处的输入波前为 $Z(r)$.

由菲涅耳衍射理论和几何光学近似条件, 可得到^[6]

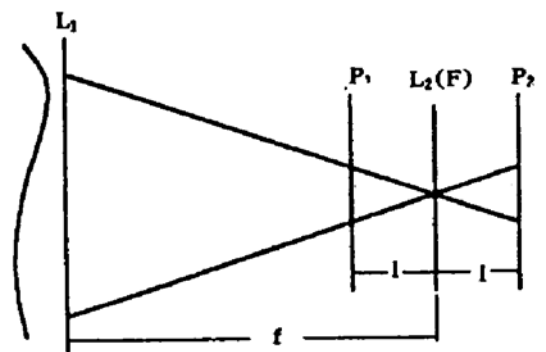


Fig. 1 Theoretical setup of the wavefront sensor

$$s(\mathbf{r}) = \frac{I_1(\mathbf{r}) - I_2(-\mathbf{r})}{I_1(\mathbf{r}) + I_2(-\mathbf{r})} = C_0 [\nabla^2 Z(C_1 \mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} Z(C_1 \mathbf{r}) \delta_0] \quad (1)$$

其中 $\nabla^2 Z$ 为波面在光瞳内部的拉普拉斯算子, 即波面的内部曲率值, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} Z$ 为波面在光瞳边缘的外法向斜率, $C_0 = f(f-l)/l$, $C_1 = f/l$.

由(1)式看出, 对于以 Zernike 多项式表征的输入波面, 有

$$s(\mathbf{r}) = C_0 \sum_{i=2}^n a_i [\nabla^2 z(C_1 \mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} z(C_1 \mathbf{r}) \delta_c] = C_0 \sum_{i=2}^n a_i r_{i,j}, \quad (2)$$

$$r_{i,j} = \nabla^2 z(C_1 \mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} z(C_1 \mathbf{r}) \delta_c$$

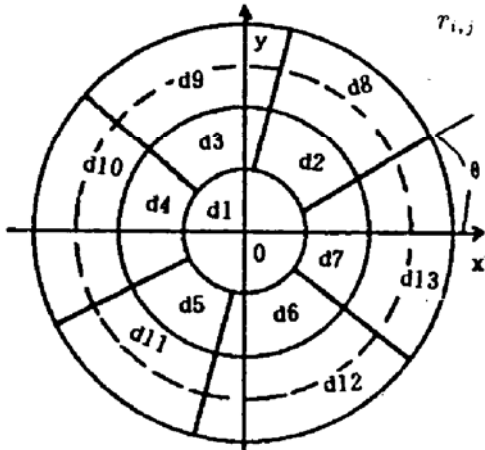


Fig. 2 Geometric setup of the wavefront detector

设使用探测器阵列的几何配置如图 2 所示, 共 13 元, 以 d_j 标记, j 由 1 到 13, 光瞳的边缘在外层的中间 (虚线). 那么(1)式中的 δ_c 应改为 C_2 , 它是与探测器的几何配置有关的常数. 分别以 Zernike 多项式的前 9 项为输入波面, 求得相应的光强分布 $I_1(\mathbf{r})$, $I_2(\mathbf{r})$ 及各探测阵元上的探测信号 $r_{i,j}$ (面元上的积分值), $r_{i,j}$ 即为该探测器阵列元 d_j 对第 i 阶 Zernike 多项式的响应矩阵元, 这样响应矩阵 $R = [r_{i,j}]$ 就得到了.

输入经大气扰动的随机波面 $Z(\mathbf{r}) = \sum_{i=2}^n a_i z_i(\mathbf{r})$, a_i

是随机产生的. 由 s 信号表达式(2)可知, 各探测器阵列元 d_j 对此输入所获得的探测信号 s_j 符合线性叠加原理 (对于 a_i), 则

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= r_{21}a_2 + r_{31}a_3 + \cdots + r_{m1}a_{m+1} \\ s_2 &= r_{22}a_2 + r_{32}a_3 + \cdots + r_{m2}a_{m+1} \\ &\cdots \cdots \\ s_n &= r_{2n}a_2 + r_{3n}a_3 + \cdots + r_{mn}a_{m+1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

将方程(3)写成矩阵形式即为:

$$S = R \cdot A, \quad (4)$$

其中 $A = [a_2, a_3, \cdots, a_m]^T$.

2.3 波前重构

根据探测器得到的波面方程(4), 在 R 为满秩的方阵时, 可以很容易地得到重构的波面的 Zernike 多项式系数矩阵为 $A = R^{-1} \cdot S$. 但是, 由于 Zernike 多项式的形式和这种传感器的原理有关, 由图 2 所示的探测器和(2)式可知, z_9, z_{10} 在光瞳内部时, $s \equiv 0$, 在光瞳边缘时, 有 $z_9, s \propto \cos 3\theta$; $z_{10}, s \propto \sin 3\theta$. 由此在 $m = 10$ 时, 使得 R 为相关阵, 方程有无穷多解, 因此取 $m = 9$, 对于其它形状的探测器, 就不定取 $m = 9$, 这时 m 和 n 不相等, 那么矩阵 R 就不存在逆矩阵. 采用最小二乘法最小范数解^[11], 得到重构波面的 Zernike 多项式系数阵: $A' = R^+ \cdot S$. 其重构波面为 $Z'(\mathbf{r}) = \sum_{i=2}^9 a'_i z_i(\mathbf{r})$, 其中 $A' = (a'_2, a'_3, \cdots, a'_9)$.

2.4 光强分布的光线追迹算法

现有计算光强分布的方法, 大部分采用的是快速傅里叶变换或直接衍射积分的方法, 根据文献[6], 它适用于几何光学理论, 为此, 可采用光线追迹的方法计算光强分布. 具体方法

是在入射波面上等间距的打网格, 每个网格点发出一条射线(光线), 用光线追迹法求出每根射线在图 3 的 P_1 和 P_2 上的截点, 获得点列图. 计算每个探测器上的截点数, 就代表其面元上的能量, 其平均值就为它们的光强分布. 其原理如图 3 所示. 透镜 L_1 的光轴置于 $(0, 0, H)$ 处. 对于入射波面 $Z = Z(x, y)$ 上的任一点 (x, y, z) , 由几何光学的原理可得, 它到 P_1 平面和 P_2 平面时的坐标分别为

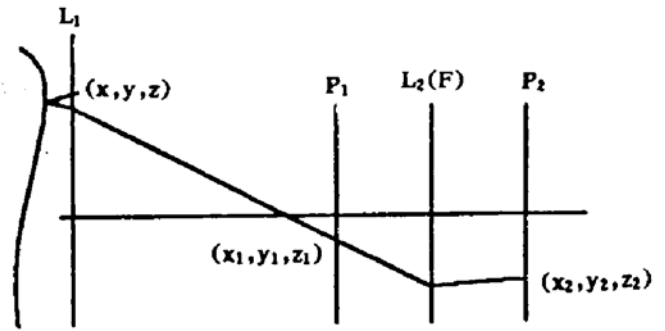


Fig. 3 Theoretical setup of ray tracing

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -Z_x(f-l) + x \times l/f + Z_x(z-H) \times l/f, \\ y_1 &= -Z_y(f-l) + y \times l/f + Z_y(z-H) \times l/f, \\ z_1 &= f-l+H. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -Z_x(f-l) - x \times l/f - Z_x(z-H) \times l/f, \\ y_2 &= -Z_y(f-l) - y \times l/f - Z_y(z-H) \times l/f, \\ z_2 &= f+l+H. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这样从入射波面射出的每一条光线, 在平面 P_1 和 P_2 上截取的位置就得到了, 其点列图和光强分布也就容易求出了.

3 计算机模拟结果

3.1 响应矩阵 R 的计算

假设选取透镜 L_1 的孔径为 1 m, 焦距 f 为 20 m, 离焦量 l 为 0.06 m, 探测器阵列最内层圆半径取为 $3/8$ 单位, 中间层圆半径取为 $6/8$ 单位, 最外层圆取为 $10/8$ 单位(设虚线圆的半径为 1 个单位), 在入射波面上两网格点的间距取为 $h = 1/800$, 取如图 2 所示的 $\theta = 0$, 利用 (5) 式和 (6) 式, 分别求出 Zernike 多项式中的 $z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9$ 在两个离焦面上的点列图, 就可求出光强分布 I_1 和 I_2 , 再根据 (2) 式求出对应于图 2 的 S 矩阵, 便得到了一个 13×8 阶的响应矩阵 R .

$$R = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 8.02 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.02 & 0.12 & 7.98 & -0.02 & -0.01 & 6.70 & 11.59 & 0.05 \\ 0.00 & -0.01 & 7.97 & 0.00 & 0.03 & 13.37 & 0.00 & 0.01 \\ -0.02 & 0.12 & 7.99 & 0.02 & -0.02 & 6.70 & -11.59 & 0.05 \\ -0.02 & -0.12 & 7.98 & -0.02 & -0.01 & -6.70 & -11.59 & -0.05 \\ 0.00 & 0.01 & 7.97 & 0.00 & 0.03 & -13.37 & 0.00 & -0.01 \\ 0.02 & -0.12 & 7.99 & 0.02 & -0.02 & -6.70 & 11.59 & -0.05 \\ -3.80 & -2.14 & -10.28 & -6.48 & -3.78 & -5.20 & -8.98 & -8.74 \\ 0.00 & -4.34 & -10.26 & 0.00 & 7.54 & -10.36 & 0.00 & 8.70 \\ 3.80 & -2.14 & -10.28 & 6.48 & -3.76 & -5.20 & 8.98 & -8.74 \\ 3.80 & 2.14 & -10.28 & -6.48 & -3.78 & 5.20 & 8.98 & 8.74 \\ 0.00 & 4.34 & -10.26 & 0.00 & 7.54 & 10.36 & 0.00 & -8.70 \\ -3.80 & 2.14 & -10.28 & 6.48 & -3.76 & 5.20 & -8.98 & 8.74 \end{bmatrix}$$

3.2 随机波面的探测和重构

利用 2.1 中论述的方法,产生经大气扰动的随机波面样本(这里假设其最高阶像差为 9 阶),由上面的方法计算重构的波面 Z' ,将输入波面的 Zernike 多项式的系数 a_i 与重构波面相应的 a'_i 列表比较,几个结果列于表 2.从表中可以看出重构波面很好的反映了输入波面.其均方差是按下式计算的:

$$\sigma = \langle (Z - Z')^2 \rangle = \sqrt{\sum_{i=2}^9 (a_i - a'_i)^2}$$

Table 2 Input wavefront compare with reconstructed wavefront

	#1		#2		#3	
	a_i	a'_i	a_i	a'_i	a_i	a'_i
2	-0.6273	-0.6293	0.7694	0.7694	-0.1224	-0.1254
3	0.0486	0.0447	-0.0989	-0.1027	-0.3816	-0.3963
4	0.0127	0.0130	0.0987	0.0991	-0.0055	-0.0055
5	-0.0568	-0.0419	0.3060	0.3155	-0.1647	-0.1705
6	-0.0834	-0.0857	0.0128	0.0100	-0.0908	-0.0914
7	-0.0838	-0.0910	-0.1380	-0.1242	0.0181	0.0238
8	0.1866	0.1872	-0.0027	-0.0054	0.0473	0.0492
9	-0.1035	-0.1122	0.1193	0.1290	-0.1075	-0.1077
σ	0.0195		0.0201		0.0171	

出现误差的原因:

- 1) 由于在(1)式的推导过程中作了几何光学近似,使它不可能严格的符合衍射理论.
- 2) 计算误差,由于进行光线追迹时,选取的网格点不够多也是造成误差的一个原因.
- 3) 由于重构波面是利用最小二乘法求得的,其系数不可能严格相等.

从文献[12]中可知,曲率传感器在校正波面时,对单个低阶的 Zernike 象差,剩余残差存在 2%的倾斜、1%的离焦和 17%的象散、37%的慧差、66%的球差,在有较高象差时误差会更大.这比本文的模型,误差大得多.

4 结 论

- 1) 求出了输入波面的 Zernike 多项式的系数,使它有可能和现有的任何变形镜相配合实现波前的校正.
- 2) 用光线追迹法,可以实现用衍射理论难以计算的复杂的光学系统的波前探测和重构.
- 3) 探测器输出的信号与探测器阵元的形状有较大的关系,以某种方法划分探测器,可实现更高阶模式的校正.

致谢 作者与曹根瑞教授进行了多次有益的探讨,王涌天教授在光线追迹的原理方面给予了帮助,在此表示谢意.

参 考 文 献

- [1] J. W. Hardy, Adaptive optics — a progress review. *Proc. SPIE*, 1991, **1542** : 1~17
- [2] R. H. Hudgin, Wavefront reconstruction for compensated imaging. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67** : 375~378
- [3] F. Roddier, M. Northcott, J. Elon., A simple low-order adaptive optics system for near infrared application. *Pub. Astr. Soci. Pac.*, 1991, **103** : 131~149
- [4] F. Roddier, Curvature sensing; a diffraction theory. NOAO; 1987, 1~5
- [5] N. Roddier, Curvature sensing for adaptive optics; A computer simulation. *Degree of Master of Science*, The University of Arizona, 1989
- [6] R. Noll, Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66** : 207~211
- [7] N. Roddier, Atmospheric wavefront simulation and Zernike polynomials. *Proc. SPIE*, 1990, **1237** : 668~679
- [8] N. Roddier, Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials. *Opt. Engng.*, 1990, **29**(10) : 1174~1180
- [9] 曹根瑞, 邵联贞, 计算机辅助的瑞奇-康芒检验. 北京工业学院学报, 1988, **8**(4) : 46~53
- [10] N. Roddier, F. Roddier, Curvature sensing and compensation; a computer simulation. *Proc. SPIE*, 1989, **1114** : 92~96

An Optical Wavefront Sensing and Reconstruction Method Based on Zernike Polynomials

Wei Xueye Yu Xin

(Department of Optical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing, 100081)

(Received 1993; revised 1993)

Abstract Atmospheric turbulenced optical wavefront could be represented with Zernike polynomials suggested by Noll. The detector response matrix R for the first n terms of Zernike polynomials has been obtained from irradiance distribution in two defocal planes. For a random wavefront, with matrix R and the irradiance distribution detected, it is easy to solve the corresponding coefficients of each Zernike polynomials and reconstruct the input wavefront. By means of ray tracing, the principle and feasibility of this novel method have been verified by computer simulation.

Key words adaptive optics, Zernike polynomials, ray tracing, irradiance distribution, wavefront reconstruction.