第 14 卷 第 6 期 光 学 学 报 Vol. 14, No. 6
1994 年 6 月 ACTA OPTICA SINICA June, 1994

奇偶相干迭加态的振幅高次方压缩*

张炎勋
(哈尔滨师范大学物理系，哈尔滨 150080)
马爱群
(哈尔滨大学，哈尔滨 150020)
时维春
(东北林业大学物理系，哈尔滨 150040)

摘 要 本文引入了光子消灭算符四次方算符 a^4 新的正交归一本征态：奇偶相干态和奇偶相干迭加态，并研究了奇偶相干迭加态的振幅高次方压缩特性.

关键词 奇偶相干迭加态， SU_4， 振幅高次方压缩.

1 引 言

求解 a^N(a 是光子消灭算符，$N\geqslant 2$)的正交归一本征态，是在理论上得到存在非经典效应的光场态的一种重要方法. Hillery[1] 给出了 a^2 的正交归一本征态的数学结构. 彭石安和郭光灿[2]还一般地给出了 a^N 的正交归一本征态的表示式：

$$|\psi_j\rangle_N = C_j\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{Nn+j}}{\sqrt{(Nn+j)!}}\,|Nn+j\rangle,\qquad (j=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,N-1),\tag{1}$$

式中归一化常数 $C_j = A_j^{-1/2}$. 令 $\chi = |\alpha|^2$,

$$A_j = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{Nn+j}}{(Nn+j)!}.\tag{2}$$

(1)式中 N 个态是 a^N 的本征值为 α^N 的 N 重简并态.

已经证明[3]：当 N 为奇数时，(1)式所表示的 N 个态都不存在光场振幅任何次方压缩；而当 N 为偶数时，相应的 N 个态只能够存在$(2p+1)\ N/2$(p 为非负整数)次方压缩.

如果对(1)式的 N 个态作 SU_N 变换，所得的 N 个态也一定是 a^N 的正交归一本征态，并且不改变 a^N 的本征值. 这种方法无疑地会得到更多的光场态. 这些光场态将比(1)式表示的光场态有更丰富的非经典特性.

本文利用 SU_4 变换得到了 a^4 的新的四个正交归一本征态. 它们由奇、偶相干态和新定义的奇、偶相干迭加态组成. 文中还详细地讨论了奇、偶相干迭加态的振幅各次方压缩特性，由此说明 a^4(乃至 a^N)的正交归一本征态存在更丰富的非经典压缩效应.

---

* 黑龙江省自然科学基金项目.
收稿日期：1993 年 3 月 18 日；收到修改稿日期：1993 年 7 月 20 日

2 a^4 的正交归一本征态的 SU_4 变换

由文献[3]给出的 a^4 的正交归一本征态在 Fock 表象中的表示式可以由(1)式直接得到，在 Glauber 相干态表象中的表示式为[4]

$$|\psi_j\rangle = \frac{1}{4} C_j e^{x/2} \sum_{l=0}^{3} e^{-ilj\pi/2} |\alpha e^{il\pi/2}\rangle, \tag{3}$$

式中 $j = 0, 1, 2, 3$(下同，一般不再注明)，A_j 可写作[3]

$$A_j = \frac{1}{4} [e^x + (-1)^j e^{-x} + 2\cos(x - j\pi/2)]. \tag{4}$$

以 $\{ |\psi_j\rangle_4\}$ 为基矢，作 SU_4 变换

$$|\varphi\rangle_4 = U |\psi\rangle_4, \tag{5}$$

式中 U 中 4×4 么模么正矩阵，

$$\det U = 1, \qquad U^+U = UU^+ = I; \tag{6}$$

$|\varphi\rangle_4$ 和 $|\psi\rangle_4$ 分别表示

$$|\varphi\rangle_4 = \begin{pmatrix} |\varphi_0\rangle_4 \\ |\varphi_1\rangle_4 \\ |\varphi_2\rangle_4 \\ |\varphi_3\rangle_4 \end{pmatrix}, \qquad |\psi\rangle_4 = \begin{pmatrix} |\psi_0\rangle_4 \\ |\psi_1\rangle_4 \\ |\psi_2\rangle_4 \\ |\psi_3\rangle_4 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

显然，${}_4\langle\varphi|\varphi\rangle_4 = {}_4\langle\psi|\psi\rangle_4 = I$，即

$${}_4\langle \varphi_j|\varphi_{j'}\rangle_4 = \delta_{jj'}, \tag{8}$$

并且

$$a^4 |\varphi_j\rangle_4 = \alpha^4 |\varphi_j\rangle_4. \tag{9}$$

也就是说，$|\varphi_j\rangle_4 (j = 0, 1, 2, 3)$ 也是 a^4 的本征值为 α^4 的正交归一本征态(四重简并态).

满足(6)式的矩阵 U 的集合$\{U\}$构成 SU_4 群. 变化群参数，通过(5)式的变换，将给出 a^4 的本征值为 α^4 的可能的四重简并的正交归一本征态. 不同的 SU_4 变换态将有不同的压缩性质.

取满足(6)式的矩阵 U 为

$$U = \begin{pmatrix} [A_0/(A_0+A_2)]^{1/2} & 0 & [A_2/(A_0+A_2)]^{1/2} & 0 \\ 0 & [A_1/(A_1+A_3)]^{1/2} & 0 & [A_3/(A_1+A_3)]^{1/2} \\ [A_2/(A_0+A_2)]^{1/2} & 0 & -[A_0/(A_0+A_2)]^{1/2} & 0 \\ 0 & [A_3/(A_1+A_2)]^{1/2} & 0 & -[A_1/(A_1+A_3)]^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

利用(1)～(4)式，计算得到 $|\varphi_0\rangle_4$ 和 $|\varphi_1\rangle_4$ 在 Fock 表象和 Glauber 相干态表象中的表示式为

$$\begin{aligned} |\varphi_0\rangle_4 &= (\mathrm{ch}\, x)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle = \frac{1}{2} e^{x/2} (\mathrm{ch}\, x)^{-1/2} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \\ &= |\alpha\rangle_e = |\psi_0\rangle_2, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle_4 &= (\mathrm{sh}\, x)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle = \frac{1}{2} e^{x/2} (\mathrm{ch}\, x)^{-1/2} (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \\ &= |\alpha\rangle_0 = |\psi_1\rangle_2. \end{aligned} \tag{12}$$

它们是 a^2 的本征态——偶相干态和奇相干态. 还可以得到

$$|\varphi_2\rangle_4 = (\mathrm{ch}^2 x - \cos^2 x)^{-1/2}(\mathrm{ch}\, x|i\,\alpha\rangle_e - \cos x\,|\alpha\rangle_e), \tag{13}$$

$$|\varphi_3\rangle_4 = (\mathrm{sh}^2 x - \sin^2 x)^{-1/2}(\mathrm{sh}\, x\,|i\,\alpha\rangle_0 - \sin x\,|\alpha\rangle_0). \tag{14}$$

$|\varphi_2\rangle_4$ 为相空间(复数 α 平面)位相差 $\pi/2$ 的两个偶相干态的迭加态，称之为偶相干迭加态；$|\varphi_3\rangle_4$ 则是两个奇相干态的迭加态，称之为奇相干迭加态. 由于它们与奇、偶相干态一起构成了 a^4 的四重简并的正交归一本征态，因此有特殊意义.

3　奇偶相干迭加态的压缩特性

光场复振幅 m 次方的两个正交厄米分量为

$$X_m = \frac{1}{2}(a^{+m} + a^m), \qquad Y_m = \frac{i}{2}(a^{+m} - a^m). \tag{15}$$

若光场满足 $\langle \Delta x_m^2\rangle < \frac{1}{4}\langle [a^m, a^{+m}]\rangle$ 或 $\langle \Delta Y_m^2\rangle < \frac{1}{4}\langle [a^m, a^{+m}]\rangle$，即

$$D_m^{(1)} \equiv \langle :\Delta X_m^2:\rangle = \frac{1}{4}(2\langle a^{+m}a^m\rangle + \langle a^{+2m} + a^{2m}\rangle - \langle a^{+m} + a^m\rangle^2) < 0, \tag{16}$$

或

$$D_m^{(2)} \equiv \langle :\Delta Y_m:\rangle = \frac{1}{4}(2\langle a^{+m}a^m\rangle - \langle a^{+2m} + a^{2m}\rangle + \langle a^{+m} - a^m\rangle^2) < 0, \tag{17}$$

则该光场存在振幅 m 次方的 X 分量或 Y 分量的压缩. 关于奇偶相干态的量子统计性质，已有详细讨论[1]. 下面，仅分析奇偶相干迭加态的振幅各次方压缩性质.

利用(5)式的变换，注意到 $a|\psi_0\rangle_4 = \alpha(A_3/A_0)^{1/2}|\psi_3\rangle_4$ 和 $a|\psi_j\rangle_4 = \alpha(A_{j-1}/A_j)^{1/2}|\psi_{j-1}\rangle_4\,(j=1, 2, 3)$，并令 $\alpha = |\alpha|\, e^{i\theta}$，由(16)和(17)式得：

对于 $|\varphi_2\rangle_4$，有

$$D_{4p+1}^{(l)} = \frac{1}{2}x^{4p+1}\left\{\frac{A_0^2A_1 + A_2^2A_3}{A_0A_2(A_0 + A_2)} + (-1)^l\cos[2(4p+1)\theta]\right\}, \tag{18}$$

$$D_{4p+2}^{(l)} = x^{4p+2}\left\{\frac{A_0^2 + A_2^2}{2A_0A_2} + (-1)^l\cos[2(4p+2)\theta]\right\} \geqslant 0, \tag{19}$$

$$D_{4p+3}^{(l)} = \frac{1}{2}x^{4p+3}\left\{\frac{A_0^2A_3 + A_1A_2^2}{A_0A_2(A_0 + A_2)} + (-1)^l\cos[2(4p+3)\theta]\right\}, \tag{20}$$

$$D_{4p+4}^{(l)} = x^{4p+4}\{1 + (-1)^l\cos[2(4p+4)\theta]\} \geqslant 0; \tag{21}$$

对于 $|\varphi_3\rangle_4$ 有

$$D_{4p+1}^{(l)} = \frac{1}{2}x^{4p+1}\left\{\frac{A_0A_3^2 + A_1^2A_2}{A_1A_3(A_1 + A_3)} + (-1)^l\cos[2(4p+1)\theta]\right\}, \tag{22}$$

$$D_{4p+2}^{(l)} = x^{4p+2}\left\{\frac{A_1^2 + A_3^2}{2A_1A_3} + (-1)^l\cos[2(4p+2)\theta]\right\} \geqslant 0, \tag{23}$$

$$D_{4p+3}^{(l)} = \frac{1}{2}x^{4p+3}\left\{\frac{A_2A_3^2 + A_0A_1^2}{A_1A_3(A_1 + A_3)} + (-1)^l\cos[2(4p+3)\theta]\right\}, \tag{24}$$

$$D_{4p+4}^{(l)} = x^{4p+4}\{1 + (-1)^l\cos[2(4p+4)\theta]\} \geqslant 0, \tag{25}$$

(21)和(25)两式相同. 以上诸式中，p 为非负整数，$l = 1, 2$. 利用(4)式，可得

$$\frac{A_0^2A_1 + A_2^2A_3}{A_0A_2(A_0 + A_2)} = \frac{\mathrm{th}\, x(\mathrm{ch}^2 x + \cos^2 x) + \sin 2x}{\mathrm{ch}^2 x - \cos^2 x}, \tag{26}$$

$$\frac{A_0^2A_3 + A_1A_2^2}{A_0A_2(A_0 + A_2)} = \frac{\mathrm{th}\, x(\mathrm{ch}^2 x + \cos^2 x) - \sin 2x}{\mathrm{ch}^2 x - \cos^2 x}, \tag{27}$$

$$\frac{A_0A_3^2 + A_1^2A_2}{A_1A_3(A_1 + A_3)} = \frac{\operatorname{cth} x(\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 x) - \sin 2x}{\operatorname{sh}^2 x - \sin^2 x} \geqslant 1, \tag{28}$$

$$\frac{A_2A_3^2 + A_0A_1}{A_1A_3(A_1 + A_3)} = \frac{\operatorname{cth} x(\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 x) + \sin 2x}{\operatorname{sh}^2 x - \sin^2 x} \geqslant 1. \tag{29}$$

将(28)和(29)式分别代入(22)和(24)式，可知对于 $|\varphi_3\rangle_4$，还有 $D_{4p+1}^{(l)} \geqslant 0$ 和 $D_{4p+3}^{(l)} \geqslant 0$. 因此，奇相干迭加态不存在光场振幅任何次方压缩；在(26)和(27)式中，取 $x = \pi/2$，这二式均等于 $\operatorname{th}(\pi/2) \approx 0.91 < 1$，这说明(26)和(27)式各自在一定 x 值范围内小于1. 进一步分析(18)和(20)式可知：必定存在一定的 x 和 θ 的取值范围，使 $|\varphi_2\rangle_4$ 的 $D_{4p+3}^{(l)} < 0$，即偶相干迭加态存在 $4p+1$ 次方压缩和 $4p+3$ 次方压缩. 两种压缩的 x 和 θ 的取值范围并不完全相同，θ 的取值还与 p 有关. 然而(19)和(21)式说明，偶相干迭加态不存在振幅 $2p$ 次方压缩.

结　语　通过文献[4]和本文的分析，可以看到，同是 a^4 的四重简并的正交归一本征态，$|\varphi_j\rangle_4$ 和 $|\psi_j\rangle_4$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ 却有不同的非经典压缩特性. $|\psi_j\rangle_4$ 只存在振幅 $4p+2$ 次方压缩(含振幅平方压缩)；而 $|\varphi_j\rangle_4$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ 的四个态中，奇相干态和奇相干迭加态无振幅任何次方压缩，偶相干态和偶相干迭加态只存在振幅 $2p+1$ 次方压缩(含通常的压缩和振幅立方压缩).

可见，作不同的 SU_4 变换，会得到具有更丰富的非经典压缩效应的 a^4 的正交归一本征态. 但是，由于 SU_4 变换态都是 a^4 的本征态，所有的 SU_4 变换态都一定不存在振幅 $4p$ 次方压缩.

参 考 文 献

[1] M. Hillery, Amplitude-squared squeezing of the electromagnetic field. *Phys. Rev.*, 1987, **A36**(8): 3796～3801

[2] 彭石安，郭光灿， 光子消灭算符高次幂的本征态及其性质. *物理学报*, 1990, **39**(1): 51～59

[3] 时维春，马爱群， 光子消灭算符 k 次幂本征态的量子统计性质. *光学学报*, 1992, **12**(10): 902～906

[4] Weichun Shi, Aiqun Ma, Shizhan Lei, Phase and number fluctuation of the orthonormalization eigenstates of a^k. *Chinese Journal of Lasers*, 1992, **1**(5): 403～408

The Properties of Amplitude High Power Squeezing of Odd and Even Coherent Superposition States

Zhang Yanxun　　　Ma Aiqun

(*Department of Physics, Harbin Normal University, Harbin* 150080)　(*Harbin College, Harbin* 150020)

Shi Weichun

(*Department of Physics, Northeast Foresty University, Harbin*, 150040)

(Received 18 March 1993; revised 20 July 1993)

Abstract In this Paper, the new orthonormalization eigenstates of the four-power of the photon annihilation operator a^4 are introduced, which are odd, even coherent states and odd, even coherent superposition states. And the properties of amplitude high power squeezing of the odd and even coherent superposition states are studied.

Key words odd and even coherent superposition states, SU_4, amplitude high power squeezing.