

多个时空变量高能激光自适应谐振腔 传递函数模型的研究*

叶嘉雄 康健

(华中理工大学光学系, 激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

摘 要 本文针对高能激光器非稳腔, 用矩阵传输光学与衍射积分方程相结合的分析方法, 建立高能激光器谐振腔的传递函数模型. 理论分析和计算机模拟结果表明, 该模型是合理的, 并获得若干重要的结论.

关键词 自适应, 激光谐振腔, 传递函数模型.

1 引 言

自 1978 年 Freeman 等人首次报道闭环自适应激光谐振腔的可行性研究^[1~2]以来, 国内外在校正腔内动态波面误差方面做了大量的工作, 取得较大的进展. 然而对自适应激光谐振腔的研究主要在理论的验证以及元器件的性能上, 涉及系统的研究却不多, 对自适应激光谐振腔系统的特性分析、模拟是一项重要课题, 其基础就是要建立自适应激光谐振腔的数学模型. 以往由于缺少相应的数学模型来指导系统设计和性能评估, 对自适应激光谐振腔的研究只能利用试验研究的方法. 这显然是不足的. 本文在理论上针对采用强度最大多路高频振动 (IMMD) 的大功率激光非稳腔, 利用矩阵传输光学与衍射积分方程相结合的分析方法, 建立谐振腔的传递函数, 以便找到一个合适的描述方法. 并用这个模型对一个实际的大功率 CO₂ 激光器进行了计算. 可以迅速方便地得到结果. 这对进一步的谐振腔分析以及系统模拟都带来极大的方便.

2 自适应激光谐振腔的基本理论

在激光谐振腔中引入多元自适应可变形反射镜就构成了一个自适应激光谐振腔, 这是一个典型的多个时空变量的动力学系统. 这里讨论采用 IMMD 的自适应激光谐振腔系统, 其可变形反射镜采用连续表面分立致动器, 谐振腔为非稳腔, 如图 1 所示.

由多路高频振动原理^[3], 当在 N 个致动器上施加不同频率 ω_i 的高频振动, 使得光束局部区域作微小扰动, 进而使光束口径各处的光强因扰动而有微小变化, 接收到的信号中包含有

* 国家自然科学基金资助项目.

收稿日期: 1993 年 3 月 9 日; 收到修改稿日期: 1993 年 7 月 12 日

各个频率分量的调制. 伺服控制系统驱动远场光强达到最大的过程, 也就是使基频 ω_m 成份振幅为零的过程. 由于系统采用 IMMD 技术, 被控参量就是激光器输出的焦面功率, 而控制量为多元致动器所施加的相位补偿量. 这样, 可以用经过多路高频振动激光谐振腔输出焦面光强中的高频振动基频分量的振幅(输出量)与多元致动器所施加的相位(输入量)之间的关系来描述自适应激光谐振腔. 这是研究自适应光学系统动力学特性的最关键的步骤.

通常, 研究谐振腔的光学理论有两种, 即谐振腔衍射理论和谐振腔光束传输理论. 这两种方法各有优缺点. 衍射积分方程解法繁琐, 而光束传输法则不能直接求出光场分布. 这里采用 Collins 公式将矩阵传输光学与衍射积分方程联系起来.

Collins 公式证明, 任何复杂的光学系统的衍射积分可以用 A, B, C, D 矩阵元素表示^[4].

$$u_2(x_2, y_2) = -\frac{ik}{2\pi\beta} e^{ikL} \iint_S u_1(x_1, y_1) \exp \left\{ \left[A(x_1^2 + y_1^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2) + D(x_2^2 + y_2^2) \right] \frac{ik}{2B} \right\} dx_1 dy_1 \quad (1)$$

式中 A, B, C, D 为传输矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 中的元素, S 为光线起始面(镜面 M_1), $u_1(x_1, y_1)$ 和 $u_2(x_2, y_2)$ 分别对应起始面 M_1 和到达面 M_2 上的光场分布, L 为腔长. 根据光学谐振腔像差的几何分析, 谐振腔内位于轴向位置 Z_m 处的相位扰动, 可由腔内不同轴向位置 Z_n 处一个等效权重的相位扰动来代换. 在这个几何理论限定下所期望的等效关系是^[5-6]

$$\delta_k(Z_n) = \frac{\alpha_k(Z_m)}{\alpha_k(Z_n)} \delta_k(Z_m) \quad (2)$$

$$\frac{\alpha_k(Z_m)}{\alpha_k(Z_n)} = \frac{M_k + [1 + (M-1)Z_m/Z_T]^k}{M_k + [1 + (M-1)Z_n/Z_T]^k} \quad (3)$$

式中 Z_T 为腔长, $\alpha_k(Z_m)$ 和 $\alpha_k(Z_n)$ 分别为腔 Z_m, Z_n 处几何相位权重因子, $\delta_k(Z_m)$ 和 $\delta_k(Z_n)$ 分别为 Z_m, Z_n 处的 k 次级内腔扰动权重因子, M 为非稳腔对几何自再现波型在腔内往返一周的放大率.

3 自适应光学谐振腔模型

这里讨论正支共焦望远型非稳腔, 设可变形反射镜有五个致动器, 边缘四个致动器相对于中心致动器呈对称均匀分布, 而且离凸面镜 Z_1 处有一个二次相位扰动面, 如图 1 所示. 由非稳腔理论, 很容易得到下面几点结论和假设:

1) 凸面镜上的光场分布为与凸面镜重合的球面波, 而且理想情况下(即无扰动)从凹面镜反射出的光波为平面波.

2) 从几何光学来看, 大部分光线(对于小凸面镜来说)实际上是一次渡越出射的. 而中间小部份光线可能要经过多次渡越, 但对相位分布影响不大. 因此, 计算远场光强只需计算

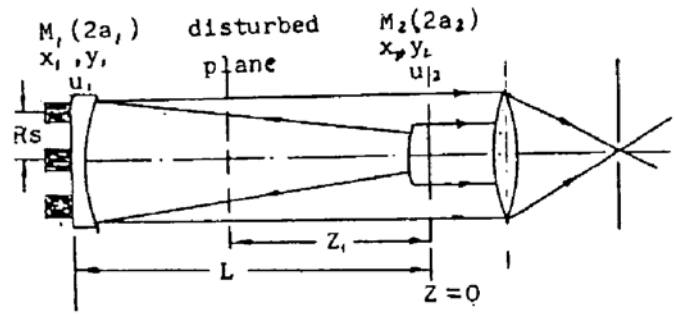


Fig. 1 Adaptive optical resonator

从凸面镜→凹面镜→凸面镜输出面→远场的一次渡越(传输)即可。

3) 达到连续稳态输出时, 谐振腔往返损耗率为常数. 所以在分析过程中不考虑损耗因子的影响.

设在 Z_1 处的扰动形式是一个二次相位扰动函数

$$\delta_{z_1}(x) = \delta_1 x + \delta_2 x^2, \quad \delta_{z_1}(y) = \delta_1 y + \delta_2 y^2 \quad (4)$$

由前述等效原理, 则可等效到凸面镜上, 这样, 相位扰动面可移至输出面, 腔内可看成无扰动. 腔内往返积分可简化为从凹面镜处出射的平面波加入可变形反射镜带入的相位扰动一次积分至输出面.

从凹面镜至凸面镜, 此时传输矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 利用前述的 Collins 公式, 则所求的凸面镜上的光场分布 $u_2(x_2, y_2)$ 可写成

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{-ikn}{2\pi L} \exp[ikL] \iint u_1(x_1, y_1) \exp\{ikn/2L[(x_1^2 + y_1^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2^2 + y_2^2)]\} dx_1 dy_1 \quad (5)$$

式中 k 为常数, n 为腔内折射率, L 为腔长. 考虑等效扰动相位, 则输出面的光场分布为:

$$u_2(x_2, y_2) = u_2'(x_2, y_2) \exp[i(\delta_1 x_2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_1 y_2 + \delta_2 y_2^2)] \quad (6)$$

式中 $u_1(x_1, y_1)$, $u_2'(x_2, y_2)$ 分别为凹面镜与凸面镜上的光场分布. 可变形反射镜上五个致动器关于中心致动器对称均匀分布, 致动器中心距为 R_s , 可变形反射镜的相位扰动应有两部分, 其扰动形式为

$$\Phi(x_1, y_1) = \sum_{j=1}^5 \phi_j I_{s_j}(x_1, y_1) + \sum_{j=1}^5 \alpha \sin \omega_j t$$

式中 ϕ_j 为第 j 个致动器补偿相位大小, I_{s_j} 为影响函数, 高频振动频率为 ω_j , α 为高频振动的振幅, 由于作为反射元件的可变形反射镜在光路中引入的相位实际上为 $\Phi(x_1, y_1)$ 的两倍, 所以 $u_1(x_1, y_1) = \exp[i2\Phi(x_1, y_1)]$. 远场光强 $u(0, 0)$ 为

$$u(0, 0) = Q \iint_{-\infty}^{\infty} u_2(x_2, y_2) dx_2 dy_2 \quad (7)$$

其中 Q 为常数, 这时远场光强 $I_r(0, 0)$ 为

$$I_r(0, 0) = |u(0, 0)|^2 \quad (8)$$

由多路高频振动原理, 只需考察 $I_r(0, 0)$ 中的 $\sin \omega_j t$ 的一次项. (7) 式直接积分比较困难, 所以首先要得到 $\sin \omega_j t$ 幅值变化与输入量 ϕ_j 的关系. 这个关系可用下面的传输矩阵表示:

$$\begin{bmatrix} (\sin \omega_1 t)_0 \\ (\sin \omega_2 t)_0 \\ (\sin \omega_3 t)_0 \\ (\sin \omega_4 t)_0 \\ (\sin \omega_5 t)_0 \end{bmatrix} = -4J_1(\alpha) \frac{c^2 k^2 n^2}{\Delta \pi^2 L^2} \begin{bmatrix} A_{11}^{\omega_1} - B_{11}^{\omega_1} & A_{21}^{\omega_1} - B_{21}^{\omega_1} & \cdots & A_{51}^{\omega_1} - B_{51}^{\omega_1} \\ A_{12}^{\omega_2} - B_{12}^{\omega_2} & A_{22}^{\omega_2} - B_{22}^{\omega_2} & \cdots & A_{52}^{\omega_2} - B_{52}^{\omega_2} \\ A_{13}^{\omega_3} - B_{13}^{\omega_3} & A_{23}^{\omega_3} - B_{23}^{\omega_3} & \cdots & A_{53}^{\omega_3} - B_{53}^{\omega_3} \\ A_{14}^{\omega_4} - B_{14}^{\omega_4} & A_{24}^{\omega_4} - B_{24}^{\omega_4} & \cdots & A_{54}^{\omega_4} - B_{54}^{\omega_4} \\ A_{15}^{\omega_5} - B_{15}^{\omega_5} & A_{25}^{\omega_5} - B_{25}^{\omega_5} & \cdots & A_{55}^{\omega_5} - B_{55}^{\omega_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中 $(\sin \omega_i t)_0$ ($i = 1, 2 \dots 5$) 为幅值. 设凹面镜与凸面镜上的光斑直径分别为 $2a_1$ 和 $2a_2$; 在光斑内把凹面镜和凸面镜划分为 N 和 H 个小方块, 每一方块的相位均匀, 而且间距为 h ; 致动器的间距为 $R_s = kh$; r_0 为影响函数半宽度. 经过计算, (9) 式中的参数为(见附录)

$$\begin{aligned}
A_{j1}^{\circ} &= 2 [\pi a_1^2 - \pi a_2^2]^2 [\pi a_1^2 I_{n_j}(R_s, 0) - \pi r_0^2] \\
A_{j2}^{\circ} &= 2[\pi a_1^2 - \pi a_2^2]^2 [\pi a_1^2 I_{n_j}(R_s, 0) - \pi r_0^2] \quad j = 1, 2 \dots 5 \\
B_{j1}^{\circ} &= \iint_{l_2, m_2 \neq 0, 0} \mathcal{A} [2 I_{n_j}(0, 0) - 2 I_{n_j}(l_2 h, m_2 h)] \left\{ 2\pi^2 (a_1^2 - a_2^2) \left[\frac{1}{2} \delta_1^2 (a_1^4 - a_2^4) + \frac{1}{3} \left(\delta_2 + \frac{kn}{2L} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \cdot (a_1^6 - a_2^6) \left. \right] - \frac{\pi^2}{2} \left(\delta_2^2 + \frac{kn}{2L} \right)^2 (a_1^4 - a_2^4)^2 + \pi (a_1^2 - a_2^2) \frac{n^2 k^2}{4L^2} [(l_2 h)^2 + (m_2 h)^2]^2 \\
&\quad + (a_1^2 - a_2^2) (a_1^4 - a_2^4) \pi^2 \left[1 - \frac{kn}{2L} \left(\delta_2 + \frac{kn}{2L} \right) + \frac{kn}{2L} \right] [(l_2^2 + m_2^2) h^2] \\
&\quad \left. - (a_1^2 - a_2^2) (a_1^4 - a_2^4) \frac{\pi^2 kn \delta_1}{2L} [(l_2 + m_2) h] \right\} d(l_2 h) d(m_2 h) \quad j = 1, 2, \dots, 5 \\
B_{j2}^{\circ} &= \iint_{l_2, m_2 \neq R_s, 0} \mathcal{A} [2 I_{n_j}(R_s, 0) - 2 I_{n_j}(l_2 h, m_2 h)] \left\{ 2\pi^2 (a_1^2 - a_2^2) \left[\frac{1}{2} \delta^2 (a_1^4 - a_2^4) \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(\delta_2 + \frac{kn}{2L} \right)^2 (a_1^6 - a_2^6) \left. \right] - \frac{\pi^2}{2} \left(\delta_2 + \frac{kn}{2L} \right)^2 (a_1^4 - a_2^4)^2 + \pi (a_1^2 - a_2^2) \frac{k^2 n^2}{4L^2} [h^2 (l_2 + m_2)]^2 \\
&\quad + (a_1^2 - a_2^2) (a_1^4 - a_2^4) \frac{\pi^2 k^2 n^2}{4L^2} [(l_2^2 + m_2^2) h^2] - \pi^2 (a_1^2 - a_2^2) (a_1^4 - a_2^4) \frac{kn}{2L} \delta_1 [(l_2 + m_2) h] \\
&\quad + \left(\frac{\pi n k}{2L} \right)^2 (R_s^2 + R_s \delta_1) (a_1^2 - a_2^2) (a_1^4 - a_2^4) + \frac{\pi k^2 n^2}{4L} R_s^4 (a_1^2 - a_2^2)^2 \\
&\quad \left. + \frac{\pi^2 k^2 n^2}{4L^2} R_s^2 (a_1^2 - a_2^2) [(l_2^2 + m_2^2) h^2] \right\} d(l_2 h) d(m_2 h) \quad (10)
\end{aligned}$$

(9)式中 \mathcal{A} 为凹面镜面积, $J_1(\alpha)$ 为贝塞耳函数

同理, 只需把(10)式中的 $I_{n_j}(R_s, 0)$ 分别用 $I_{n_j}(0, R_s)$ 、 $I_{n_j}(-R_s, 0)$ 、 $I_{n_j}(0, -R_s)$ 替代, 并把积分区间 $l_2, m_2 \neq R_s, 0$ 分别换成 $l_2, m_2 \neq (0, R_s)$ 、 $(-R_s, 0)$ 、 $(0, -R_s)$ 即可得 A_{j3}° 、 B_{j3}° 、 A_{j4}° 、 B_{j4}° 、 A_{j5}° 、 B_{j5}° 。

对(9)式作拉普拉斯变换, 即可得到腔的传递函数矩阵 $H_c(s)$ 。

$$H_c(s) = -4J_1(\alpha) \frac{c^2 k^2 n^2}{4\pi^2 L^2} \begin{bmatrix} A_{11}^{\circ} - B_{11}^{\circ} & A_{21}^{\circ} - B_{21}^{\circ} & A_{31}^{\circ} - B_{31}^{\circ} & A_{41}^{\circ} - B_{41}^{\circ} & A_{51}^{\circ} - B_{51}^{\circ} \\ A_{12}^{\circ} - B_{12}^{\circ} & A_{22}^{\circ} - B_{22}^{\circ} & A_{32}^{\circ} - B_{32}^{\circ} & A_{42}^{\circ} - B_{42}^{\circ} & A_{52}^{\circ} - B_{52}^{\circ} \\ A_{13}^{\circ} - B_{13}^{\circ} & A_{23}^{\circ} - B_{23}^{\circ} & A_{33}^{\circ} - B_{33}^{\circ} & A_{43}^{\circ} - B_{43}^{\circ} & A_{53}^{\circ} - B_{53}^{\circ} \\ A_{14}^{\circ} - B_{14}^{\circ} & A_{24}^{\circ} - B_{24}^{\circ} & A_{34}^{\circ} - B_{34}^{\circ} & A_{44}^{\circ} - B_{44}^{\circ} & A_{54}^{\circ} - B_{54}^{\circ} \\ A_{15}^{\circ} - B_{15}^{\circ} & A_{25}^{\circ} - B_{25}^{\circ} & A_{35}^{\circ} - B_{35}^{\circ} & A_{45}^{\circ} - B_{45}^{\circ} & A_{55}^{\circ} - B_{55}^{\circ} \end{bmatrix} \quad (11)$$

由(9)(10)式可看出, 若谐振腔参数给定, 则上述传递函数矩阵可用计算机数值积分法算出。

4 实际谐振腔计算结果分析

为了验证上述模型的正确性, 对国内一个万瓦 CO_2 激光器中非稳腔进行了计算, 非稳腔的有关参数列于表 1。

讨论小扰动的情况, 即相位扰动小于 2π 的情形, 以避免 $2n\pi$ 的不确定性问题。所以, 通常是 $(2a_1)\delta_1 + (2a_1)^2\delta_2 \leq 2\pi$ 。对于 δ_1 和 δ_2 的计算, 依据经验, 一阶像差占 $2/3$, 二阶像差占 $1/3$ 。可取 $\delta_1 = 4\pi/3 \times 45$, $\delta_2 = 2\pi/3 \times 2025$ 。在计算机上进行数值计算, 得到 A_{ij}° 和 B_{ij}° 各元素值, 并作归一化处理, 得到

Table 1. Laser resonator parameters

Parameter	data	parameter	data
convex mirror curvature radius (R_2)	6340 mm	effect function mode of deformable mirror (I_s)	$\exp(r^2/r_0^2)$
light spot diameter on convex mirror ($2a_2$)	24 mm	halfwidth square of effect function (r_0^2)	100 mm ²
intracavity reflective index (n)	1.0	concave mirror curvature radius (R_1)	14027 mm
actuator spacing of deformable mirror (R_s)	18 mm	light spot diameter on concave mirror ($2a_1$)	45 mm
phase disturbance first-order coefficient (δ_1)	δ_1 (rad/mm)	cavity length (L)	3370 mm
phase disturbance second-order coefficient (δ_2)	δ_2 (rad/mm)	dither amplitude (α)	$\lambda/20$
distance of phase disturbance from convex mirror (Z_1)	1500 mm		

$$H_c(s) = V \cdot \begin{bmatrix} 0.299 & -0.0362 & -0.0362 & -0.0362 & -0.0362 \\ -0.1128 & 1 & -0.1557 & -0.1628 & -0.1611 \\ -0.1128 & -0.1557 & 1 & -0.1611 & -0.1628 \\ -0.1128 & -0.1557 & -0.1557 & -0.9946 & -0.1611 \\ -0.1128 & -0.1557 & -0.1557 & -0.1611 & -0.9946 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中

$$V = -4J_1(\alpha) \frac{c^2 k^2 n^2}{4\pi^2 L^2} \cdot f$$

f 为进行归一化处理时, 矩阵中元素最大值. $f = -1838095776339$.

(12)式矩阵称为 g 矩阵, 其元素由 g_{ij}^0 表示. 这表明:

1) $g_{11}^0, g_{31}^0, g_{41}^0, g_{51}^0$ 完全一致; $g_{12}^0, g_{13}^0, g_{14}^0, g_{15}^0$ 也完全一致. 这就验证了如下的理论: 在理论上边缘四个致动器由于是原心对称, 且均匀分布, 并且相位扰动形式也是原点对称均匀分布, 所以中心致动器与边缘四个致动器之间的相互作用也应该是相同的.

2) 式中 $g_{ij}^0 < g_{ii}^0 (j = 2, \dots, 4)$, 由此可说明, 当光腔存在着相位倾斜和相位弯曲畸变时, 腔模总的相位弯曲严重地耦合到相位倾斜畸变中去, 而腔模总的相位弯曲畸变不依赖(或依赖较小)所施加的相位倾斜畸变, 这预示着对腔模场的影响也会受到更高次畸变的耦合, 这种各级次畸变之间的耦合, 改变了光腔对各类畸变的灵敏度. 这一模型, 正确地反映了几何光学和波动光学的谐振腔理论所得出的结果.

3) $g_{ij}^0, g_{ji}^0 (i, j = 2 \dots 5, i \neq j)$ 都对应相等或近似相等, 说明边缘四个致动器相互之间的作用相等.

4) 正负号表明各 ϕ_j 对 $\Delta I \sin \omega_j t$ 的作用有增有减, 这正是能使得 $\Delta I \sin \omega_j t$ 趋于零而使远场功率达到最大的原因.

总之从式(12)可以看出, 自适应光学谐振腔的数学模型与实际情况吻合得很好, 模型是可靠的.

结 论 以上分析说明, 利用矩阵传输光学与衍射积分方程相结合的方法, 本文首次导出的自适应光学谐振腔的数学模型与实际情况吻合得很好、数学模型可靠, 其重要意义在于能用一种简单的模型来描述复杂的谐振腔. 作者依据此模型进行了自适应光学谐振腔系统的模拟, 取得非常好的结果.

参 考 文 献

- [1] R. H. Freeman, Adaptive laser resonator. *Opt. Lett.*, 1978, 2(3): 61~63
- [2] R. R. Stephens, Experimental study of an adaptive laser resonator. *Opt. Lett.*, 1978, 3(3): 79~81
- [3] T. R. Omeara, The multidither principle in adaptive optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, 67(3): 306~315
- [4] 吕百达, 激光光学. 成都, 四川大学出版社, 1986, 59~61
- [5] K. E. Oughstun, Intracavity adaptive optic compensation of phase aberrations, I: Analysis. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, 71(9): 862~872
- [6] K. E. Oughstun, Intracavity adaptive optic compensations II: Passive cavity study for a small Neq resonator. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, 71(10): 1180~1191
- [7] J. E. Pearson, R. H. Freeman, Adaptive optical techniques for wavefront correction. *Appl. Opt.*, 1977, 16(2): 245~340

A Study of Transform Function Model of Multiple Temporal-Spatial Variables Adaptive High Energy Laser Resonator

Ye Jiexiong Kang Jian

(National Laboratory of Laser Technology, Department of Optical Engineering
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

(Received 9 March 1993; revised 12 July 1993)

Abstract A mathematical model of the optical resonator of high energy laser is set up in this paper specially for the unstable resonator of high energy laser by using the method of matrix transmission optics combining with diffraction integral equation. The results of computer simulation show that the model is correct and some important results are achieved.

Key words adaptive laser resonator, transform function.