第14卷 第6期　　光 学 学 报　　Vol. 14, No. 6
1994年6月　　ACTA OPTICA SINICA　　June, 1994

激光大气传输束心抖动概率分布

张逸新*　迟泽英　游明俊　陈文建
（华东工学院光电技术系，南京 210014）

摘　要　用概率理论研究了湍流大气中传播激光束心抖动概率分布和抖动导致点孔检测平均光强起伏概率分布．结果表明，二维束心抖动概率满足 Rician 分布而点孔检测平均光强的起伏满足 Gamma 分布．

关键词　光束抖动，　概率分布．

1　引　　言

随着激光应用的不断发展，深入了解激光束在湍流大气中传播时所反映出的统计特性是大气传输领域的一个重要课题．至今，分别讨论光强起伏特性或其它量的起伏特性已有不少报道，而实际系统反映的起伏特性总是湍流大气光传播效应中，如光强起伏，光束抖动等的综合效应．就直接探测系统而言，检测到的光强起伏的主要影响来自不同信道光波间干涉引起的光强起伏和大尺度湍涡、大气不稳定性导致的光束抖动．因此仪器检测到的光信号的起伏概率分布由光束抖动和光强起伏联合决定．为了能从理论上得到与实际情况相一致的光闪烁分布必须深入研究这二种统计分布规律．目前光强起伏概率分布的理论和实验研究已较多[1]，也已有人在忽略光束慢漂移的情况下研究了光束抖动分布[2~4]、三维抖动分布[5]和进行了束心抖动的实验研究[6]．文献[2]从抖动的形式机制定性地得到二维抖动满足瑞利分布，文献[4]从爱因斯坦-福克-柯尔莫哥洛夫方程着手，在光线小角度偏离的情况下得到光束抖动满足高斯分布的结论，而光束抖动对点孔接收光强的调制概率分布的理论分析则较少．

本文从有限光束束心抖动的随机行走规律和点孔后检测平均光强起伏所满足的生灭-迁移随机过程的统计规律，从理论上分别研究了光束抖动和抖动对光强起伏的调制概率分布规律．

2　束心抖动概率分布

由激光大气传输的研究[2,6]可知当激光束通过湍流大气时，由于大气湍流造成的光束波阵面形变和光路上一系列大于光束范围的湍流对光束的随机偏折等效应，致使有限光束束心

---

* 现在工作单位：无锡轻工业学院机械系，无锡 214036

收稿日期:1991年9月20日；收到修改稿日期:1991年11月26日

在其统计平均位置周围作随机移动. 另外，由湍流扩散等湍流场的特征可知，近地面处于湍流运动状态的大气中每一点的风速值、温度和湿度以及折射率都经历不规则的起伏；同一时刻空间各个点的折射率也以随机方式彼此不同，从而致使在其间传播的有限光束束心随机漂移(即抖动)在任意选定的正交坐标系统的二个轴向是互相统计独立的. 因此，为方便起见，以平行于地面的水平轴（x 轴）的束心移动为研究对象讨论束心抖动的概率分布. 假设对束心位置变动作了 N 次测量，显然现在束心位移只能是沿着 x 轴正向和逆着 x 轴正向移动的两种结果之一. 假定沿 x 轴正向的移动量为 x_1 的概率为 p，沿坐标轴负向移动量为 x_2 的概率为 q，那么 $p+q=1$，x_1 和 x_2 是随机变量.

设给定的相继 N 次移动的测量中，结果为 x_1 的出现 n_1 次，结果为 x_2 的出现 n_2 次($N=n_1+n_2$). 根据大气湍流场中大气折射率随时随地作随机变化的特征，可以认为束心的 N 次移动是统计独立的. 那么由概率理论可知，具有确定排列的 n_1 个结果 x_1 和 n_2 个结果 x_2 的概率为 $p^{n_1}q^{n_2}$. 在 N 次束心移动中发生 n_1 次 x_1 移动的概率为[7]

$$P_N(n_1)\equiv\frac{N!}{n_1!\ n_2!}\ p^{n_1}q^{n_2}, \tag{1}$$

而 n_1 的方差为

$$\sigma_{n_1}^2=\langle n_1^2\rangle-\langle n_1\rangle^2, \tag{2}$$

其中：

$$\langle n_1\rangle=\sum_{n_1=0}^{N}n_1P_N(n_1)=pN,\qquad \langle n_1^2\rangle=\sum_{n_1=0}^{N}n_1^2P_N(n_1)=(Np)^2+Npq.$$

在实际光束抖动的实验研究中，为了消除偶然误差，束心移动的实验数据采样样本数 N 总是足够大的，即 n_1 和 n_2 也是个大数. 对于 $n_1>10$ 的情况下，可对 n_1 应用斯特令公式

$$n_1!\approx\sqrt{2\pi n_1}\ (n_1/e)^{n_1}, \tag{3}$$

利用(3)式，二项式分布(1)式为

$$P_N(n_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\exp\left[-(n_1+1/2)\ln\left(\frac{n_1}{N}\right)-(N-n_1+1/2)\ln\left(\frac{N-n_1}{N}\right)\right.$$
$$\left.+n_1\ln p+(N-n_1)\ln(1-p)\right]. \tag{4}$$

二项式分布 $P_N(n_1)$ 在 $n_1=\langle n_1\rangle=Np$ 处出现一极大，因而平均值 $\langle n_1\rangle$ 随 N 而增大. 又因为 $N\gg1$ 时，在 $\langle n_1\rangle$ 附近区域的 n_1 值远大于 n_1 所可能出现的整数改变量，所以在极大区域内可把 n_1 当作连续变量处理. 由于束心移动样本数 $N\gg1$，并且束心抖动所经历区域的对称性，即 $n_1\approx\langle n_1\rangle$，可把 n_1 看作连续变量，那么 $P_N(n_1)$ 是概率密度函数 $P(n_1)$. 由上述分析(4)式近似为

$$P(n_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\exp\left[-n_1\ln(n_1/N)-(N-n_1)\ln\left(\frac{N-n_1}{N}\right)+n_1\ln p\right.$$
$$\left.+(N-n_1)\ln(1-p)\right]. \tag{5}$$

在 $n_1=\langle n_1\rangle$ 附近展开上式指数上的宗量，则

$$P(n_1)=C\exp\left[-\frac{1}{2}B_2\varepsilon^2+\frac{1}{6}B_3\varepsilon^3+\cdots\right] \tag{6}$$

其中 C 是待定常数，$\varepsilon=n_1-\langle n_1\rangle$，而

$$B_k = \left(\frac{d^k \ln\left[\sqrt{2\pi N}\ P(n_1)\right]}{dn_1^k} \right)_{n_1=\langle n_1 \rangle} \tag{7}$$

由(7)式可得到 $|B_k| < 1/[Npq]^{k-1}$，因为 N 足够大，$n_1 \approx \langle n_1 \rangle$，$\varepsilon^2 \ll Npq$. 所以高于 ε^2 的高次项可略去，从而有

$$P(n_1) \approx C\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}|B_2|\varepsilon^2}. \tag{8}$$

而常数 C 由归一化条件求得 $C = 1/\sqrt{2\pi Npq}$，注意到标准偏差 $\sigma_{n_1} = \sqrt{Npq} = \sqrt{\langle n_1^2 \rangle - \langle n_1 \rangle^2}$，则 $P(n_1)$ 为

$$P(n_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_1}^2}} \exp\left[-\frac{(n_1 - \langle n_1 \rangle)^2}{2\sigma_{n_1}^2}\right], \tag{10}$$

由于束心的每一次位移大小独立于以前的移动结果，那么束心移动 N 次后，净移动次数为 $m = n_1 - n_2 = 2n_1 - N\ (-N \leqslant m \leqslant N)$. 将 $n_1 = (m+N)/2$ 代入(10)式，利用一维概率变换 $P(m)\ dm/dn_1 = P(n_1)$，即 $P(m) = P(n_1)/2$，便有束心抖动净位移 m 的概率密度函数

$$P(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}} \exp\left[-\frac{(m - \langle m \rangle)^2}{2\sigma_m^2}\right], \tag{11}$$

故 m 服从高斯分布. 假设每一次抖动的平均大小为 l 则束心净位移 $x = ml$，由变换 $P(x) = \frac{1}{l} P(m)$，则

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma_x^2}\right]. \tag{12}$$

在不考虑慢漂移时束心抖动经历的区域是圆域[8]，那么沿 x 轴位移的均值 $\langle x \rangle = 0$，从而

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right). \tag{13}$$

上式表明束心的一维抖动满足高斯分布.

至于沿 y 方向的束心抖动概率分布，可用类似(13)式导得方法得到

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2\sigma_y^2}\right]. \tag{14}$$

因为在近地面折射率随离地高度存在梯度且该梯度随地表温度变化而变化，故在考虑 y 方向束心抖动时必须考虑束心的慢漂移的影响[9]，即 $\langle y \rangle = \rho_0 \neq 0$. 从(14)式和(15)式即得到总的光束抖动概率分布

$$P(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-\rho_0)^2}{2\sigma_y^2}\right]. \tag{15}$$

在均匀各向同性湍流大气中传播的光束其快抖动是均匀各向同性的，即 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_\rho^2$，$\sigma_\rho^2$ 是光束快抖动方差[10]，$\sigma_\rho^2 = 0.97\, C_n^2 D^{-1/3} L_1^3 F_1\left(\frac{1}{3}, 1;\ 4;\ \frac{L}{F}\right)$，$C_n^2$ 是折射率结构参数，D 是光束发射端直径，L 是光束传过的大气路径长度，F 是光束的焦距，${}_2F_1(a, b;\ c;\ d)$ 是超几何函数. 激光束心位于距平均原点 ρ 的概率密度则为

$$P(\rho) = \int_0^{2\pi} P(x,y)\ d\theta = \frac{\rho}{\sigma_\rho^2} \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho_0^2}{2\sigma_\rho^2}\right] I_0\left(\frac{\rho\rho_0}{\sigma_\rho^2}\right). \tag{16}$$

其中 I_0 是修正贝塞尔函数，(16)式表明光束抖动的二维概率分布满足 Rician 分布. 在光束慢

漂移可忽略时 $\rho_0 = 0$，则光束抖动的二维概率分布满足瑞利分布[2,3]

$$P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma_\rho^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma_\rho^2}\right) \tag{17}$$

3 光束抖动对检测光强的调制概率

从激光大气传输研究可知，激光束经大气湍流散射因散射波间的干涉而形成时变碎斑[11]，又由于实际湍流大气由不同尺度（折射率起伏也不一定相同）湍涡构成，不同散斑元通过不同湍涡降低了光束的横向相干性使光束分裂为多个子散斑[12]，每个子散斑仍由时变碎斑构成，各子散斑的平均光强满足一定分布. 所以从点孔后检测到的局部时间（局时）平均光强由于束心抖动及湍涡导致的子散斑的随机偏折作用也是一个随机变量[13].

设在某段时间范围内光束中某子散斑处于点孔探测器前，假定在 $t = t_0$ 时刻点孔后测量到的光强 I 恰为该子斑的平均光强 $\langle I_t \rangle$，在 $t_0 + \Delta t$ 时刻，由于子散斑的随机移动，若时变亮碎斑 $(I_t > \langle I_t \rangle)$ 恰好位于点孔前，那么检测到的光强为 $I + \Delta I$，而若时变暗碎斑 $(I_t < \langle I_t \rangle)$ 恰好位于点孔前，那么检测到的光强为 $I - \Delta I$，前者相当于"产生"了 ΔI，后者相当于"湮灭"了 ΔI. 然而光束的慢漂移，束心抖动和子散斑的偏折不仅导致同一子斑内的不同时变碎斑随机地通过点孔，而且使得不同子散斑随机交替地通过点孔导致测量局时平均光强发生独立于"纯生灭"过程效应的"迁移"变化. 所以光束抖动对点孔测量平均光强的调制过程可以看作一个生灭-迁移过程.

为了能得到近似反映接收光强光束抖动调制概率分布的明确关系式，用光强的直方近似 $I = \sum_{i=1}^{N} \Delta I_i$ 描述光强起伏[14]，并认为每次光强改变量达到 $\Delta I =$ 常量时，过程进行了一次"产生"或"湮灭"的变化. 那么用约化强度 $N_1 = I/\Delta I$ 描述 t 时刻的光强状态时，测量光强每增加或降低一次的变化状态由 $N_1 + 1$，$N_1 - 1$ 表示. 这样测量到的约化强度为 N_1 状态的概率满足下列速率方程[15]

$$\frac{dP_{N_1}}{dt} = \mu\,(N_1 + 1)\,P_{N_1+1} - [(\lambda + \mu)\,N_1 + v]\,P_{N_1} + [\lambda(N_1 - 1) + v]P_{N_1-1}, \tag{18}$$

其中 λ、μ 分别是"生"、"灭"率，v 是"迁移"率，P_{N_1+1}，P_{N_1-1} 是 $N_1 + 1$，$N_1 - 1$ 状态出现的概率.

通过 $N_1 = \overline{N}\,x$ 引入新变量 x，$\overline{N} = \dfrac{v}{\mu - \lambda}$，假定在测量过程中散斑元经历了多次交替，且由湍流介质起伏的均匀性 μ 与 λ 很接近，$\overline{N}$ 是个足够大的数，从而 x 几乎近似为一个连续变量，类似上节定义有概率密度函数

$$\mathscr{P}\,(x,t) = P_{N_1}(t) = P_{\overline{N}x}\,(t). \tag{19}$$

现在(18)式变为

$$\frac{1}{\overline{N}}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial t}\,(x,t) = \mu\left(x + \frac{1}{\overline{N}}\right)\mathscr{P}\left(x + \frac{1}{\overline{N}},\, t\right) - \left[(\lambda + \mu)x + \frac{v}{\overline{N}}\right]\mathscr{P}\,(x,t)$$
$$+ \left(\lambda x + \frac{v - \lambda}{\overline{N}}\right)\mathscr{P}\left(x - \frac{1}{\overline{N}},\, t\right), \tag{20}$$

由(20)式可得到 $\overline{N}$ 倒数的指数展开级数

$$\frac{1}{\overline{N}}\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{P}(x,t)=\frac{1}{\overline{N}}(\mu-\lambda)\frac{\partial}{\partial x}[x\mathscr{P}(x,t)]+\frac{1}{\overline{N}^2}[\frac{1}{2!}(\mu+\lambda)x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{P}(x,t)$$

$$+(\mu-\nu+\lambda)\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{P}(x,t)]+O(\frac{1}{\overline{N}^2}). \tag{21}$$

在上式作变换 $t'=t/\overline{N}$，且注意到在采样时间足够长时，$\mu\to\lambda$，$\overline{N}\to\infty$，则 $\mathscr{P}$ 满足 Fokker-Planck 方程

$$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t'}=\lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\mathscr{P})+\nu\frac{\partial}{\partial x}[(x-1)\mathscr{P}]. \tag{22}$$

当激光在缓变湍流大气中传输时，$\mathscr{P}$ 近似地与 t' 无关，即$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t'}=0$，从而有

$$\mathscr{P}(x)=\frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\alpha x}x^{\alpha-1}, \tag{23}$$

其中 $\alpha=\nu/\lambda$，x 正比于 $I/\langle I\rangle$. 作为近似取 $x=I/\langle I\rangle$，即可以得到光束抖动导致点接收的局时平均光强起伏所满足的概率分布是 Gamma 分布

$$\mathscr{P}(I)=\frac{\alpha(\alpha I/\langle I\rangle)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\langle I\rangle}\exp\left(-\frac{\alpha I}{\langle I\rangle}\right),\qquad I>0 \tag{24}$$

4 讨论与结论

本文分析表明光束在湍流大气中传输时束心的一维抖动满足高斯分布，一般情况下束心的二维抖动满足 Rician 分布，而在忽略慢漂移时，束心的二维抖动满足瑞利分布. 光束抖动将导致点孔后检测到的局部时间平均光强为一个随机量其满足 Gamma 分布，实际上该结论也可以从抖动概率分布定性得出. 把光束抖动的影响看作大尺度湍涡对小尺度湍涡散射光波的再次散射，导致光波的 $\sqrt{\langle I\rangle}=\sqrt{\langle A^2\rangle}$ 随机起伏，其起伏规律与束心位置 ρ 的起伏规律相同即 $\mathscr{P}(\rho^2)$ 满足的分布规律同 $\mathscr{P}(I)$ 的分布规律. 对点孔检测而言慢漂移影响是一个不可忽略的因素，那么由概率变换关系 $P(\rho)=2\rho\mathscr{P}(\rho^2)$，从(16) 式可得 $\mathscr{P}(\rho^2)$ 近似式

$$\mathscr{P}(\rho^2)\approx\frac{\alpha^\alpha(\rho^2)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\langle\rho^2\rangle^\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha\rho^2}{\langle\rho^2\rangle}\right), \tag{25}$$

其中 $\langle\rho^2\rangle=\rho_0^2+2\sigma_\rho^2$，$\alpha=\langle\rho^2\rangle^2/[\langle\rho^4\rangle-\langle\rho^2\rangle^2]$. 由于 $\mathscr{P}(\rho^2)$ 是 Gamma 分布，所以由此也可得到 $\mathscr{P}(I)$ 是 Gamma 分布的结论.

参 考 文 献

[1] N. Ben-Yosef, E. Goldner, Splitting-source model for the statistics of irradiance scintillations. *J. O. S. A.* (*A*), 1988, **5**(1): 126

[2] D. Fried, Statistics of laser beam fade induced by pointing jitter. *Appl. Opt.*, 1973, **12**(4): 422

[3] P. Tittertor, Power reduction and fluctuation caused by narrow laser beam motion in the far field. *Appl. Opt.*, 1973, **12**(4): 423

[4] L. A. Chernov, *Wave Propagation in a Random Medium.* (McGnaw-Hill Book Company INC, New York, 1960), Chap. 2

[5] S. Chatterjee, Probability of arrival of ray of light for propagation through random media: connection with rotational Brownian motion. *Opt. Commum.*, 1989, **74**(3～4): 149

[6] 宋正方整理， 激光大气传输专辑(Ⅱ). (安徽光机所), 1976, 26

[7] 复旦大学数学系， 概率论(第一册)，(人民教育出版社，北京，1979)，77
[8] R. Fante， Electromagnetic beam propagation in turbulent media. *Proc. IEEE.* , 1975, **63**(12) : 1669
[9] V. V. Vinogradov *et al.* , Effect of refraction on propagation of a wave beam in a turbulent medium. *Radiophys. Quant. Electron.* , 1985, **28**(10) : 850
[10] J. H. Chumside, R. J. Lataitis, Wanders of an optical beam in the turbulent atmosphere. *Appl. Opt.* , 1990, **29**(7) : 926
[11] H. T. Yura, Short-term average optical-beam spread in a turbulent medium. *J. O. S. A.* , 1973, **63**(5) : 567
[12] A. Ishimaru, *Laer Beam Propagation in the Atmosphere.* (J. W. Strohbehn, Springer-Verlag, New York, 1978), 139
[13] 张逸新等， 激光大气闪烁概率分布. 科学通报，1988，**33**(10)：747
[14] J. W. Goodman， 激光斑纹及有关现象. (J. C. 丹蒂，科学出版社，北京，1981)，51
[15] E. Jakeman, R. J. A. Tough, Non-Gaussian models for the statistics of scattered wave. *Adv. in Phys.* , 1988, **37**(5) : 471

Probability Distribution of Beam-Centre Wanders of Laser Beam in Atmosphere

Zhang Yixin
(*Department of Mechanics, Wuxi Institute of Light Industry, Wuxi* 214036)
Chi Zeying　　You Mingjun　　Chen Wenjian
(*Department of Photoelectrical Technology, East China Institute of Technology, Nanjing* 210014)
(Received 30 September 1991; revised 26 November 1991)

Abstract The probability distribution of the beam-centre wanders and the probability distribution of the fluctuating average intensity measured by the point-aperture and caused by beam wander have been studied by using the probability theroy for laser beam propagation in a turbulent atmosphere. The results shown, the probability distribution of the two-dimension beam wandrs obeys Rician distribution, and the probability distribution of the average intensity fluctuations measured by the point-aperture satisfies Gamma distribution.

Key words beam wander, probability distribution.