

# 横向位移双曝光散斑图维纳谱的信息分布\*

胡逸群 费跃平 谷士文 孙阳智

(长沙铁道学院科研所, 长沙 410075)

**摘 要** 讨论了横向位移双曝光散斑图维纳谱的信息分布, 并由此导出了杨氏条纹图的一般表达式. 讨论了条纹可见度与应变、面内转动、照明光束直径与条纹图空间坐标的关系, 指出了在条纹可见度影响下最大可见条纹数目. 还讨论了散斑衬比与衍射晕的关系.

**关键词** 散斑衬度, 条纹可见度, 衍射晕, 维纳谱.

## 1 引 言

用数字图像技术处理双曝光散斑摄影杨氏条纹图, 其目的是要精确测得条纹间距与方向. 各种处理方法都是基于对条纹图基本特征的假设与了解, 例如衍射晕, 条纹可见度、噪声等. 现已提出的各种方法, 比如条纹图除以衍射晕函数<sup>[1]</sup>、傅里叶变换法<sup>[2]</sup>、沃尔什变换法<sup>[3]</sup>、数字校正法<sup>[4]</sup>、选择路径法等<sup>[5,6]</sup>, 均假设条纹可见度是常量. 但是, 由 Georgieva 实验测得的条纹可见度在条纹图内是变化的<sup>[7]</sup>. Hirsch 指出变化的可见度比常值可见度对条纹极值点的漂移有更为复杂的影响<sup>[8]</sup>.

作者要分析双曝光横向位移散斑图维纳谱的信息特征. 因为逐点分析法仅是本文的一个特例, 故从该特征出发, 能方便地解释逐点法条纹图的形成机理与信息内容, 并由此而导出条纹可见度、衍射晕与其他各因素的关系, 为正确处理条纹图提供理论依据.

## 2 散斑图维纳谱的一般表达式

图 1 是得到横向位移双曝光散斑图维纳谱的示意图. 散斑图置于变换透镜  $L_1$  的前焦面上, 用振幅为 1 相干平面波照明, 透射光波经透镜衍射到后焦面, 这个面上的光强分布即为散斑图的维纳谱<sup>[9]</sup>

$$W_1(\mathbf{r}_f) = \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)[I_1(\mathbf{r}_1) + I_2(\mathbf{r}_1)][I_1(\mathbf{r}_2) + I_2(\mathbf{r}_2)] \\ \times \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda f}\mathbf{r}_f \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金资助项目.

收稿日期: 1992 年 5 月 6 日

式中  $\phi$  表示散斑图上激光照明区的形状函数,  $I_i$  表示第  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 次曝光时的光强,  $r_f$  为谱面坐标,  $r$  为散斑图平面坐标. 为了得到维纳谱的基本特征, 必须求  $W_i(r_f)$  的系综平均. 除了一个  $\sigma$ -函数外, 光强的维纳谱与光强起伏的维纳谱相同, 以下用后者讨论. 假设散斑光强是广义平稳的, 且物体变形后, 散斑只发生平移, 形状不变, 即有

$$I_2(r) = I_1[r - l(r)] \quad (2)$$

式中  $l(r)$  为坐标  $r$  处的散斑位移. 那么容易得到下式

$$\left. \begin{aligned} \langle \Delta I_1(r_1) \Delta I_1(r_2) \rangle &= \langle \Delta I_2(r_1) \Delta I_2(r_2) \rangle = R_u(r_2 - r_1) \\ \langle \Delta I_1(r_1) \Delta I_2(r_2) \rangle &= R_u[r_2 - l(r_2) - r_1] \\ \langle \Delta I_1(r_2) \Delta I_2(r_1) \rangle &= R_u[r_2 + l(r_1) - r_1]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

显然, 光强起伏的维纳谱系综为

$$\begin{aligned} \langle W_M(r_f) \rangle &= \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(r_1) \phi(r_2) [2R_u(r_2 - r_1) + R_u(r_2 - l(r_2) - r_1) + R_u[r_2 + l(r_1) - r_1]] \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{i2\pi}{\lambda f} r_f \cdot (r_2 - r_1) \right] dr_1 dr_2 \end{aligned} \quad (4)$$

式中尖括号表示求系综,  $R_u$  表示光强起伏的自相关. 上式积分结果的第一项为

$$\langle W_M(r_f) \rangle_1 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r_2) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r_2 - Ar) R_u(Ar) \exp \left[ -\frac{i2\pi}{\lambda f} (r_f \cdot Ar) \right] d(Ar) \right] dr_2,$$

一般情况下, 激光照明区远大于散斑尺寸, 故  $R_u$  的取值范围远小于  $\phi$  的范围,  $\phi(r_2 - Ar)$  可放到内积分外并取  $Ar = 0$  时的值, 故

$$\langle W_M(r_f) \rangle_1 = 2SN(r_f) \quad (5)$$

式中  $S$  为激光照明区域面积,  $N(r_f)$  为  $R_u$  的傅里叶变换或单曝光散斑图的维纳谱, 或称衍射晕函数. 类似地不难推出(4)式的第二项和第三项,

$$\langle W_M(r_f) \rangle_2 = N(r_f) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r) \phi[r - l(r)] \exp \left[ -\frac{i2\pi}{\lambda f} r_f \cdot l(r) \right] dr \quad (6a)$$

$$\langle W_M(r_f) \rangle_3 = \langle W_M(r_f) \rangle_2^* \quad (6b)$$

式中“\*”表示复共轭, 把(5)、(6)式代入(4)式便得到散斑图光强起伏的维纳谱一般表达式

$$\langle W_M(r_f) \rangle = 2N(r_f)S \left\{ 1 + \frac{1}{S} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r) \phi[r - l(r)] \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda f} r_f \cdot l(r) \right] dr \right\} \quad (7)$$

由上式可见, 物体面内位移的信息包括在维纳谱中. 它是对一个余弦函数的积分, 积分范围为两个错开距离等于散斑位移的激光照明区的叠加区. 一般说来, (7)式并不表示一幅受衍射晕调制的余弦条纹图, 因此在图 1 的谱面上, 一般看不到干涉条纹.

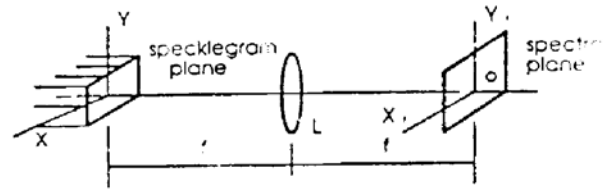


Fig. 1 Arrangement of the observation of Wiener spectrum produced by a double exposure specklegram

### 3 特殊情况下的维纳谱

#### 3.1 物体地面内旋转

设物体在平面内转动一小角  $\theta = \theta k$ , 如图 2 所示. 转动中心的像点在散斑图平面上为  $O'$  点. 在  $o'x'y'$  坐标系中, 激光照明区的中心坐标矢量为  $r_0$ , 照明区内任一点的坐标矢量为  $r'$ , 则

$$l(r) = \theta \times r' = \theta \times r_0 + \theta \times r. \quad (8)$$

将(8)式代入(6a)式得

$$\begin{aligned} \langle W_{sl}(r_f) \rangle_2 &= N(r_f) \exp \left[ -\frac{i2\pi}{\lambda f} r_f \cdot (\theta \times r_0) \right] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r) \phi(r-l) \exp \left[ -\frac{i2\pi}{\lambda f} r_f \cdot (\theta \times r) \right] dr \end{aligned} \quad (9)$$

如果位移  $|l|$  与照明区域相比足够小,  $\phi(r-l) \approx \phi(r)$ , 且照明区是一个半径为  $b$  的圆形, 经过简单计算, 上式结果为

$$\langle W_{sl}(r_f) \rangle_2 = SN(r_f) \exp \left[ -\frac{i2\pi}{\lambda f} r_f \cdot (\theta \times r_0) \right] \frac{2J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda f} r_f b \theta\right)}{\frac{2\pi}{\lambda f} r_f b \theta} \quad (10)$$

式中  $J_1$  为一阶贝塞耳函数. 条纹图为

$$\langle W_{sl}(r_f) \rangle = 2SN(r_f) \left\{ 1 + v \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda f} r_f \cdot (\theta \times r_0) \right] \right\}, \quad (11)$$

$v$  为条纹可见度,

$$v = 2J_1(\zeta)/\zeta, \quad \zeta = \frac{2\pi}{\lambda f} r_f b \theta \quad (12)$$

当  $J_1(\zeta)/\zeta$  取第一个零值时的根  $\zeta_1 = 1.22 \pi$  时, 条纹消失, 即

$$\left( \frac{r_f b \theta}{\lambda f} \right)_{\max} = 0.61 \quad (13)$$

显然物体的转角  $\theta$ , 激光照明区的半径, 条纹图的空间频率坐标  $\frac{r_f}{\lambda f}$  均影响条纹可见度. 条纹可见度是坐标的函数, 靠近晕中心, 可见度高. 对于给定的  $b$  与  $\theta$ , 条纹的最大可见范围为

$$(r_f)_{\max} = 0.61 \frac{\lambda f}{\theta} \quad (14)$$

将由(11)式得到的条纹间距代入上式, 便得可见条纹个数为(假设衍射晕足够大)

$$N = 2 \frac{(r_f)_{\max}}{\Delta} = 1.22 \frac{l_0}{b\theta} \quad (15)$$

式中  $\Delta$  为条纹间距,  $l_0 = |r_0| \theta$  为激光照明区中心点的位移. 这一结果与文献[10]一致. 显然  $l_0$  较大,  $b\theta$  较小时, 可见条纹数较多. 这表明测量灵敏度受到了可见度的影响. 由(12)式可知, 等可见度曲线是一族圆.

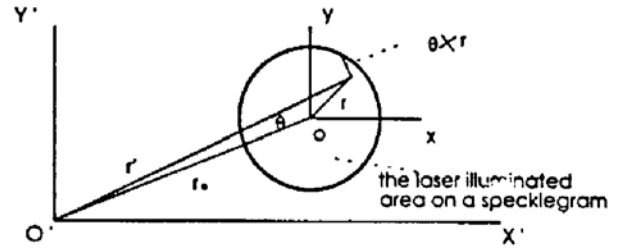


Fig. 2 Speckle displacement resulting from small in-plane rotation of a specimen  
 $O'$  - rotation centre;  $O$  - centre of the laser illuminated area on the specklegram;  $\theta$  - small rotation angle of the specimen

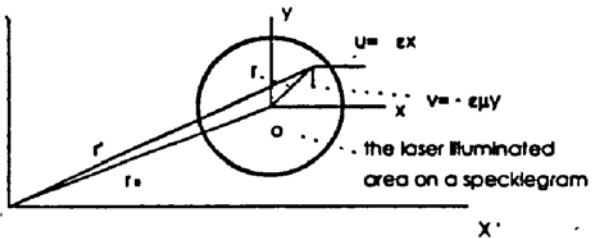


Fig. 3 Speckle displacement resulting from uniform stretching of a specimen  
 $\epsilon$  - horizontal strain;  $\mu$  - Poisson ratio of the used material;  
 $u$  - horizontal displacement;  $v$  - vertical displacement

### 3.2 物体受均匀拉伸(或压缩)变形

如图 3 所示, 物体受到沿  $x'$  方向的均匀拉伸, 散斑图上一点  $\mathbf{r}'(x', y')$  处的水平位移为  $\varepsilon x'$ , 竖直位移为  $\mu \varepsilon y'$ ,  $\mu$  为材料的泊松比,

$$\mathbf{l}(\mathbf{r}) = \varepsilon x' \mathbf{i} - \mu \varepsilon y' \mathbf{j} = \varepsilon(x_0 \mathbf{i} - \mu y_0 \mathbf{j}) + \varepsilon(x \mathbf{i} - \mu y \mathbf{j}) \quad (16)$$

将(16)式代入(6a)式, 得

$$\begin{aligned} \langle W_{d1}(\mathbf{r}_f) \rangle_2 &= N(\mathbf{r}_f) \exp \left[ -i \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda f} \mathbf{r}_f \cdot (x_0 \mathbf{i} - \mu y_0 \mathbf{j}) \right] \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r} - \mathbf{l}) \exp \left[ -\frac{i 2\pi \varepsilon}{\lambda f} \mathbf{r}_f \cdot (x \mathbf{i} - \mu y \mathbf{j}) \right] dx dy \quad (17) \end{aligned}$$

与推导(11)式类似, 可得维纳谱为

$$\langle W_{d1}(\mathbf{r}_f) \rangle = 2N(\mathbf{r}_f) S \left\{ 1 + 2v \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda f} \varepsilon \mathbf{r}_f \cdot (x_0 \mathbf{i} - \mu y_0 \mathbf{j}) \right] \right\} \quad (18)$$

条纹可见度与(12)式相同, 但  $\zeta = \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda f} b \sqrt{x_f^2 + \mu y_f^2}$ , 它是应变  $\varepsilon$ 、泊松比  $\mu$ 、照明区半径  $b$  的函数, 且随条纹图上的位置而变. 可见度在谱面上是椭圆对称的. 等可见度曲线为一族椭圆

$$\frac{x_f^2}{C^2} + \frac{y_f^2}{C^2/\mu^2} = 1 \quad (19)$$

长轴位于  $y_f$ . 考虑实际可观测的条纹数, 先求出与条纹垂直的直线(过条纹图中心), 由

$$\mathbf{r}_f \times (x_0 \mathbf{i} - \mu y_0 \mathbf{j}) = 0$$

得直线方程为

$$x_f = \frac{x_0}{\mu y_0} y_f \quad \text{对 } y_0 \neq 0 \quad (20a)$$

$$y_f = 0 \quad \text{对 } y_0 = 0 \quad (20b)$$

可见如果激光照明区位于  $x'$  轴上时, 条纹与  $x'$  轴垂直. 在(20a)和(20b)两条直线上, 条纹可见度表达式中  $\zeta$  分别为  $\frac{2\pi \varepsilon b}{\mu \lambda f y_0} y_f \sqrt{x_0^2 + (\mu y_0)^2}$  和  $\frac{2\pi \varepsilon b}{\lambda f} x_f$ . 由  $J_1(\zeta)/\zeta$  的第一个零点, 得到条纹的最大可见范围为

$$(\mathbf{r}_f)_{\max} = \frac{0.61 \lambda f}{\varepsilon b} \quad (21)$$

最大可见条纹数仍如(15)式所示, 但  $l_0 = \varepsilon \sqrt{x_0^2 + (\mu y_0)^2}$ .

## 4 衍射晕函数与散斑衬比的关系

对衍射晕函数的讨论, 已有很多文献可供查阅<sup>[11]</sup>. 不同光源, 不同的照明相机入瞳, 有不同的衍射晕. 这里用一简化的模型对各种类型的衍射晕做统一描述. 衍射晕是单曝光散斑图的功率谱. 单曝光散斑图是由大量光强快速无规涨落的颗粒组成的. 颗粒具有一定的线度, 在一个颗粒内, 光强是变化的. 但从散斑图整体来看, 可以认为在该颗粒内光强是常数. 因此用一随机梳状函数来表示单曝光散斑图

$$I(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N I_i \phi_i(\mathbf{r}) \otimes \delta(\mathbf{r} - \mathbf{l}_i) \quad (22)$$

式中  $\mathbf{r}$  为散斑图坐标,  $I_i$  表示第  $i$  个散斑的光强,  $\phi_i(\mathbf{r})$  是该颗粒的形状函数,  $\mathbf{l}_i$  表示  $\phi_i$  的位置.  $I_i$ 、 $\phi_i$  及  $\mathbf{l}_i$  是互相独立的随机变量,  $N$  是激光读出时照明区内的散斑个数,  $\delta$  为狄拉克  $\delta$ -函数,

⊗ 表示卷积.

为了方便, 将(22)式改写为

$$I(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N (I_i - I_0) \phi_i(\mathbf{r}) \otimes \delta(\mathbf{r} - I_i) + I_0 \phi(\mathbf{r}) \quad (23)$$

$\phi(\mathbf{r})$  的意义同(1)式. 由于线性记录, 则在图 1 所示的谱面上光振幅分布为(忽略常系数)

$$U_{\text{谱}}(\mathbf{r}_f) = \mathcal{F} \left\{ \sum_{i=1}^N (I_i - I_0) \phi_i(\mathbf{r}) \otimes \delta(\mathbf{r} - I_i) \right\} + \delta(\mathbf{r}_f) \quad (24)$$

光强的分布为(略去  $\delta$ -函数)

$$I(\mathbf{r}_f) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (I_i - I_0)(I_j - I_0) \mathcal{F} \{ \phi_i(\mathbf{r}) \} \mathcal{F}^* \{ \phi_j(\mathbf{r}) \} \quad (25)$$

由于  $I_i$  与  $\phi_i$  独立, 上式表示在谱面上的光强仍为散斑场. 要得出晕函数的特征, 必须对上式求系综

$$N(\mathbf{r}_f) = \langle I(\mathbf{r}_f) \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle (I_i - I_0)(I_j - I_0) \rangle \langle \mathcal{F} \{ \phi_i(\mathbf{r}) \} \mathcal{F}^* \{ \phi_j(\mathbf{r}) \} \rangle \quad (26)$$

如果  $I_i$  是各态历经的, 则

$$\langle (I_i - I_0)(I_j - I_0) \rangle = \begin{cases} \sigma_i^2 & i = j \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (27)$$

式中  $\sigma_i^2$  为散斑光强的方差. 因此(26)式简化为

$$N(\mathbf{r}_f) = C^2 I_0^2 N_0(\mathbf{r}_f) \quad (28)$$

式中  $C$  为散斑的衬度,  $N_0(\mathbf{r}_f) = \sum_{i=1}^N \langle |\mathcal{F} \{ \phi_i \} |^2 \rangle$  为归一化的衍射晕函数. 显然, 散斑颗粒越精细, 衍射晕的分布范围越大; 散斑衬比越高, 则衍射晕越亮或衍射效率越高. 虽然激光散斑的衬比一般近似为 1(在粗糙表面下), 但部分相干散斑和非相干散斑的衬比常小于 1. 因此, 用白光散斑法测量位移时, 提高散斑的衬比是至关重要的.

## 5 结 论

从横向位移双曝光散斑图的维纳谱信息分布出发, 讨论了杨氏条纹图的形成、可见度和衍射晕函数. 在有应变和转角的情况下, 条纹图的可见度不是常量, 分别具有圆对称性和椭圆对称性. 靠近晕中心, 条纹对比度高. 衍射晕的亮度或衍射效率(它决定条纹图的亮度)正比于散斑衬比的平方.

## 参 考 文 献

- [1] 胡逸群, 一种自动分析散斑摄影杨氏条纹图的数字图象复原技术——衍射晕影响的消除. 光学学报, 1988, 8(11): 1012~1016
- [2] G. H. Kaufmann, Numerical processing of speckle photography data by Fourier transform. *Appl. Opt.*, 1981, 20(24): 4277~4280
- [3] J. M. Huntley, Speckle photography fringe analysis by the Walsh transform. *Appl. Opt.*, 1986, 25(2): 382~386
- [4] S. A. Jsacon, G. H. kaufmann, Two-dimensional digital processing of speckle photography fringe, 2: Diffraction halo influence for the noisy case. *Appl. Opt.*, 1985, 24(10): 1444~1447
- [5] C. S. Vikram, K. Vedam, Selective counting path of Young's fringes in speckle photography for eliminating diffraction halo effects. *Appl. Opt.*, 1983, 22(15): 2242~2243

- [6] 胡逸群, 沿着圆周路径测量散斑摄影杨氏条纹图. 中国激光, 1989, 16(4): 218~220
- [7] Jordanka Georgia, Diffraction halo effect in speckle photography. *Appl. Opt.*, 1986, 25(22): 3970~3976
- [8] K. Hinsch, Fringe position in double-exposure speckle photography. *Appl. Opt.*, 1989, 28(24): 5298~5304
- [9] 方 强, 谭玉山, 激光散斑计量术的统计模型. 西安交通大学学报, 1991, 25(5): 27~32
- [10] 范象英, 激光散斑位移测试可测范围的研究. 实验力学, 1988, 3(1): 68~73
- [11] Poland Minaret, Diffraction halo in speckle photography. *Appl. Opt.*, 1984, 23(14): 2235~2236

## Information Distribution of Wiener Spectrum of Double Exposure Specklegrams in Lateral Displacement Measurement Young' s Fringe Patterns on Displacements and Speckle Contrast

Hu Yiqun    Fei Yaoping    Gu Shiweng    Song Yangzhi  
(Changsha Railway University, Research Department Changsha, Changsha 410075)

(Received 6 May 1992)

**Abstract** In this paper, the information characteristics of the Wiener spectrum of a double exposure specklegram have been discussed. As an example, the general expressions of Young' s fringe patterns are obtained. We have analysed the fringe visibility and its dependence on the nature of the deformation and displacement of the specimen and on the extent of laser beam illuminated area on the specklegrams. The maximum number of visible fringes has been derived. Finally, diffraction halo brightness and its dependence on the contrast of speckles have been given.

**Key words** speckle contrast, fringe visibility, diffraction halo, Wiener spectrum.