

# 附加克尔介质 Jaynes-Cummings 模型的场熵演化

方卯发 刘惠恩

(湖南师范大学 物理系  
物理研究所, 长沙 410081)

**摘 要** 研究了附加克尔(Kerr)介质 Jaynes-Cummings(J-C)模型场熵演化的动力学特性, 讨论了克尔介质非线性相互作用以及失谐量对场熵演化的影响.

**关键词** 附加克尔介质 J-C 模型, 约化密度矩阵, 场熵演化.

## 1 引 言

目前, 在量子光学领域, 研究 J-C 模型<sup>[1]</sup>的动力学特性是一个热门课题. 人们对 J-C 模型中光场、原子的压缩效应, 光场的量子位相特性<sup>[2]</sup>, 原子反转的崩溃与回复现象等作了大量的研究. 近来, Phoenix 和 Knight 等人<sup>[3]</sup>又应用熵理论研究光场与物质(原子)相互作用时的信息关联与演化, 显示出很大的优越性. 由于量子系统的熵自动包含了系统密度算符的高阶统计矩, 是一种十分灵敏的量子态纯度的操作测量<sup>[3]</sup>, 同时也是解释量子系统动力学特性的重要工具<sup>[4]</sup>. 光场(原子)的熵可以由其约化密度算符定义<sup>[3]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} S_{F(A)}(t) &= -\text{Tr}_{F(A)} \{ \hat{\rho}_{F(A)}(t) \ln [\hat{\rho}_{F(A)}(t)] \} \\ \hat{\rho}_{F(A)}(t) &= \text{Tr}_{A(F)} \{ \hat{\rho}(t) \} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中,  $\hat{\rho}(t)$  为光场-原子全系统的密度算符, 下标  $F(A)$  表示光场(原子). 光场(原子)的熵可由其约化密度算符的本征值来计算:

$$S_{F(A)}(t) = - \{ \pi_{F(A)}^- \ln \pi_{F(A)}^- + \pi_{F(A)}^+ \ln \pi_{F(A)}^+ \} \quad (2)$$

若设光场、原子初始时刻无关联地处于纯态, 则光场-原子全系统的熵  $S$  为零且不随时间演化, 根据熵的 Araki-Lieb 不等式<sup>[3]</sup>:

$$|S_F(t) - S_A(t)| \leq S(\rho) \leq S_F(t) + S_A(t) \quad (3)$$

在  $t > 0$  的任何时刻, 光场与原子的熵相等:  $S_F(t) = S_A(t)$ .

近年来, 人们研究了单光子<sup>[3]</sup>、双光子<sup>[4]</sup>、多光子<sup>[5]</sup> J-C 模型场熵的演化. 但 J-C 模型的另一推广——附加克尔介质 J-C 模型<sup>[6]</sup>的场熵演化则少见涉及. 本文研究该模型中场熵演化的动力学特性, 讨论克尔介质与模场的非线性相互作用以及失谐量对场熵演化的影响.

## 2 附加克尔介质 J-C 模型及其场约化密度矩阵

附加克尔介质 J-C 模型系统由充满克尔介质的单模腔和一个两能级原子组成<sup>[6]</sup>. 克尔介质可模拟为一个频率为  $\omega$  的非简谐振子, 单模场与克尔介质和两能级原子同时耦合相互作用. 文献[6]、[7]给出了在旋波近似下该系统的有效哈密顿. 设初始时刻原子处于激发态  $|+\rangle$ , 模场处于相干态:

$$|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(in\beta) |n\rangle, \quad b_n = \exp(-n_c/2) n_c^{n/2} / \sqrt{n!} \quad (4)$$

式中,  $n_c$  为初始相干光场的平均光子数,  $\beta$  为其位相角 ( $0 \leq \beta \leq 2\pi$ ). 在相互作用绘景中, 对于时间  $t > 0$  的任何时刻, 系统的态矢为<sup>[2,7]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} |\psi_{r-A}(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n(t) |n, +\rangle + B_n(t) |n+1, -\rangle\} \\ A_n(t) &= b_n \exp[i(n\beta - n^2\chi t)] \left[ \cos \Omega_n t + i \frac{\chi n + \Delta/2}{\Omega_n} \sin \Omega_n t \right] \\ B_n(t) &= -ib_n \exp[i(n\beta - n^2\chi t)] \frac{g(n+1)^{1/2}}{\Omega_n} \sin \Omega_n t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中  $\chi$  为克尔介质与模场相互作用的非线性振幅, 其大小反映非线性相互作用的强弱.  $\Delta$  为失谐量,  $g$  为原子与模场的耦合常数,  $\Omega_n$  为广义拉比(Rabi)频率:

$$\Omega_n = [(\chi n + \Delta/2)^2 + g^2(n+1)]^{1/2} \quad (6)$$

(5)式中  $|-\rangle$  表示原子处于基态. 很明显, (5)式确定的态矢在  $\chi = 0$  时相应于标准 J-C 模型的态矢.

利用(5)式, 得到场的约化密度矩阵为:

$$\begin{aligned} \rho_r(t) &= \text{Tr}_A \{ |\psi_{r-A}(t)\rangle \langle \psi_{r-A}(t)| \} \\ &\equiv |C\rangle \langle C| + |S\rangle \langle S| \end{aligned} \quad (7)$$

$$|C\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) |n\rangle, \quad |S\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) |n+1\rangle \quad (8)$$

利用场的约化密度矩阵(7)式, 可以对克尔介质 J-C 模型场熵的演化特性进行研究.

## 3 场熵的一般计算公式

场熵的计算关键在于将场约化密度矩阵对角化, 求出其本征值. 为此可将场约化密度矩阵的本征函数写成如下形式:

$$|\psi_r\rangle = \zeta |C\rangle + \eta |S\rangle \quad (9)$$

利用(7)式确定的约化密度矩阵作用在(9)式描述的本征态上, 得到:

$$\rho_r(t) |\psi_r\rangle = \left\{ \langle C|C\rangle + \langle C|S\rangle \frac{\eta}{\zeta} \right\} \zeta |C\rangle + \left\{ \langle S|S\rangle + \langle S|C\rangle \frac{\zeta}{\eta} \right\} \eta |S\rangle \quad (10)$$

式中:

$$\begin{aligned}
 \langle C|C \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \left[ \cos^2 \Omega_n t + \frac{(\chi n + \Delta/2)^2}{\Omega_n^2} \sin^2 \Omega_n t \right] \\
 \langle S|S \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \frac{g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \sin^2 \Omega_n t \\
 \langle C|S \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n b_{n+1} \left\{ \sin [(2n+1)\chi t - \beta] \cos \Omega_{n+1} t \right. \\
 &\quad - \cos [(2n+1)\chi t - \beta] \frac{\chi(n+1) + \Delta/2}{\Omega_{n+1}} \sin \Omega_{n+1} t \left. \right\} \frac{g(n+1)^{1/2} \sin \Omega_n t}{\Omega_n} \\
 &\quad - i \sum_{n=0}^{\infty} b_n b_{n+1} \left\{ \sin [(2n+1)\chi t - \beta] \frac{\chi(n+1) + \Delta/2}{\Omega_{n+1}} \sin \Omega_{n+1} t \right. \\
 &\quad \left. + \cos [(2n+1)\chi t - \beta] \cos \Omega_{n+1} t \right\} \frac{g(n+1)^{1/2} \sin \Omega_n t}{\Omega_n}
 \end{aligned} \tag{11}$$

从(10)式可见: 场约化密度矩阵的本征值应有如下关系:

$$\pi_r = \langle C|C \rangle + \langle C|S \rangle \frac{\eta}{\xi} = \langle S|S \rangle + \langle S|C \rangle \frac{\xi}{\eta} \tag{12}$$

根据文献[3], 进行如下替换:

$$\left. \begin{aligned}
 \langle C|S \rangle &= |\langle C|S \rangle| \exp(i\phi), & \delta &= \frac{1}{2|\langle C|S \rangle|} [\langle C|C \rangle - \langle S|S \rangle], \\
 \theta &= \sinh^{-1}(\delta), & \xi &= \exp(\pm \theta/2) \exp(i\phi/2), \\
 \eta &= \pm \exp(\mp \theta/2) \exp(-i\phi/2),
 \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

将上述替换代入(12)式, 则场约化密度矩阵的本征值  $\pi_{\pm}$ 、本征函数  $|\psi_{\pm}\rangle$  和模场的熵  $S_r(t)$  分别可以写为:

$$\begin{aligned}
 \pi_{\pm} &= \langle C|C \rangle \pm \exp(\mp \theta) |\langle C|S \rangle| \\
 &= \langle S|S \rangle \pm \exp(\pm \theta) |\langle C|S \rangle|
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{[2\pi_{\pm} \cosh(\theta)]^{1/2}} \left[ \exp\left[\frac{1}{2}(i\phi \pm \theta)\right] |C\rangle \pm \exp\left[-\frac{1}{2}(i\phi \pm \theta)\right] |S\rangle \right] \tag{15}$$

$$S_r(t) = -\{\pi_{\pm} \ln \pi_{\pm} + \pi_{\mp} \ln \pi_{\mp}\} \tag{16}$$

一般地由(11)、(13)、(14)、(16)式确定的场熵中的作用不能给出精确的解析表达式, 可以对其作数值计算, 展示场熵演化的动力学特性.

## 4 数值计算与结果讨论

将反映克尔介质非线性相互作用强弱的参数  $\chi/g$  取不同数值, 对(16)式确定的场熵作数值计算, 结果如图 1 所示. 下面讨论克尔介质非线性相互作用对场熵演化的影响:

1) 场熵敏感于克尔介质的非线性相互作用. 当参数  $\chi/g$  从 0.00 微小增加到 0.05 时, 从图 1(a)和(b)可看出: 场熵的演化行为变化很大. 而从文献[7]图 1(a)和(b)可知, 此处原子反转的演化行为十分相似. 这说明: 场熵比原子反转更敏感于克尔介质的非线性相互作用, 其原因是场熵包含了场约化密度矩阵的高阶统计矩<sup>[3]</sup>.

2) 弱耦合时, 场熵可随克尔介质非线性相互作用增强而增大. 当  $\chi/g = 0.00$  时, 无克尔介质非线性相互作用, 这相应于标准 J-C 模型的情况: 场熵[图 1(a)]在原子反转回复时间的一半 [ $t = t_r/2 = 14.0/g$ , 参照文献[7]图 1(a)]时演化到最小, 场态几乎返回初始纯态. 随

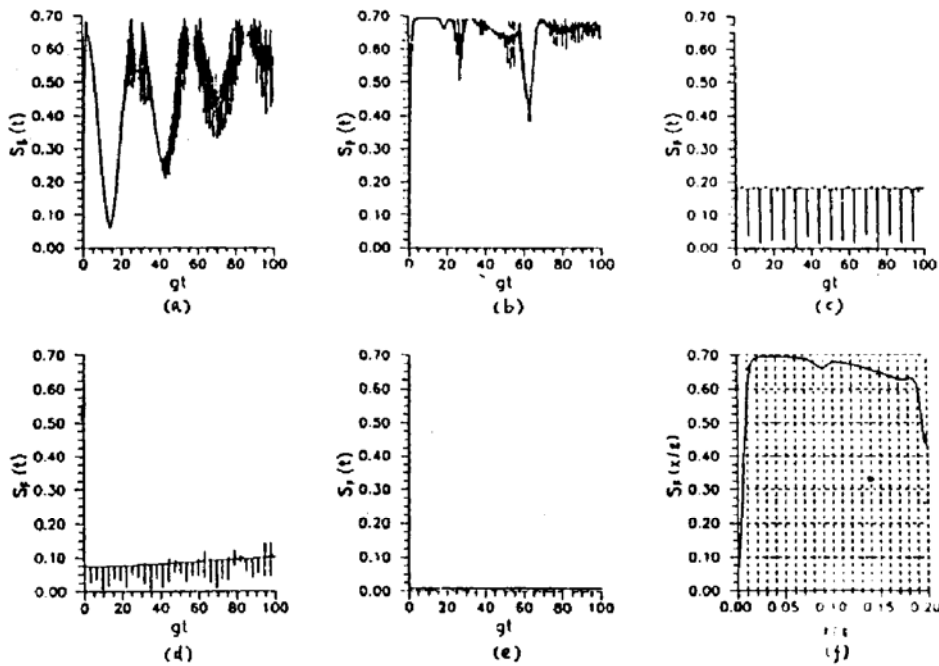


Fig. 1 (a)~(e): Evolution of the field entropy for an initial coherent state field with  $n_c = 20$  and the atom initially inverted, and detuning  $\Delta = 0.0$ , each figure corresponds to a different value of the parameter  $\chi/g$  :

(a)  $\chi/g = 0.00$ ; (b)  $\chi/g = 0.05$ ; (c)  $\chi/g = 0.50$ ; (d)  $\chi/g = 1.00$ ; (e)  $\chi/g = 5.00$ ; (f) the field entropy changes with  $\chi/g$ ,  $gt = 14.0$ ,  $n_c = 20$ ,  $\Delta = 0.0$

着时间发展, 原子与场的相互作用使得最小场熵值不断增大, 因而模场与原子的关联不断增强, 与文献[3]的结论一致; 当  $\chi/g = 0.05$ , 模场与克尔介质弱耦合时, 场熵演化[图 1(b)]与  $\chi/g = 0.00$  的情况相比, 最大熵值未变, 但持续时间增加, 原来对应  $\chi/g = 0.00$  的场熵演化“低谷”区域的熵值现已增大. 为看清楚这种变化, 通过数值求解弱耦合,  $t = t_R/2 = 14.0/g$  时刻场熵随  $\chi/g$  变化的规律, 如图 1(f)所示. 可见: 当  $0.00 < \chi/g \leq 0.02$  时, 场熵随  $\chi/g$  增大而增大; 当  $0.02 < \chi/g \leq 0.07$  时, 场熵保持最大熵值 0.693 不变, 此处模场与原子高度关联, 适合于由测量原子的性质来推断场包含的信息. 当  $\chi/g > 0.07$  时, 场熵随  $\chi/g$  的增大而开始减小.

3) 强耦合时, 场熵随克尔介质非线性相互作用增强而显著减小. 当  $\chi/g$  增大到 0.5 时, 最大场熵值由 0.693 减小到 0.18 左右[图 1(c)]. 场熵演化呈现明显的周期性, 演化周期与原子反转回复周期相同[与文献[7]图 1(d)比较]. 场熵在原子反转的回复区域演化到最小, 场态接近初始纯态, 而在原子反转的崩溃区域持续最大. 当  $\chi/g$  增大到 1.0 的强耦合时[图 1(d)], 一方面最大场熵继续减小; 另一方面由于原子与模场接近退耦合<sup>[7]</sup>, 此处场熵演化几乎只由克尔介质与模场的相互作用控制, 场熵随时间的发展有增加趋势. 这一点与只存在原子与模场相互作用时场熵演化[图 1(a)]有相似之处. 当  $\chi/g$  进一步增大到 5.0 的超强耦合时, 场熵[图 1(e)]在整个演化过程中趋向于零, 场态趋向于持续、低熵的纯态, 原子反转接近于 1<sup>[7]</sup>, 原子被“陷于”激发态, 呈现“布居俘获”, 光场、原子退耦合, 无关联. 作为对照, 在标准 J-C 模型场熵演化中[图 1(a)], 由于模场仅与原子耦合, 只能形成瞬时的纯态光场.

4) 以上讨论的是模场与原子共振时( $\Delta = 0$ )的情况, 对于失谐情况( $\Delta \neq 0$ ), 我们的数值结果表明: 在  $\chi/g$  一定的条件下, 共振时场熵最大, 失谐量  $\Delta$  增大, 场熵减小, 模场与原子的关联程度减小.

## 参 考 文 献

- [1] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to beam maser. *Proc. IEEE*, 1963, **51**(1): 89~109
- [2] 方卯发, 附加克尔介质 Jaynes-Cummings 模型场的位相特性. *光学学报*, 1993, **13**(4): 324~329
- [3] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight, Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance. *Ann. Phys. (N. Y.)*, 1988, **186**: 381~407
- [4] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight, Periodicity, phase, and entropy in models of two-photon resonance. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1990, **7**(1): 116~124
- [5] 方卯发, 周 鹏, 多光子 Jaynes-Cummings 模型场熵的演化. *光学学报*, 1993, **13**(8): 799~804
- [6] G. S. Agarwal, R. R. Puri, Collapse and revival phenomenon in the evolution of a resonant field in a Kerr-like medium. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**(6): 2969~2997
- [7] Vladimir Buzek, Igor Jex, Dynamics of a two-level atom in a Kerr-like medium. *Opt. Commun.*, 1990, **78**(5,6): 425~435

## Evolution of the Field Entropy in the Jaynes-Cummings Model with an Additional Kerr Medium

Fang Maofa      Liu Huien

(*Department of Physics*  
*Research Institute of Physics*, Human Normal University, Changsha 410081)

(Received 19 April 1993; revised 3 August 1993)

**Abstract** The dynamics properties of the evolution of field entropy in the Jaynes-Cummings model with an additional Kerr medium are studied. The effects of nonlinearity interaction of the Kerr medium with the model field and of detuning on the evolution of the field entropy are discussed.

**Key words** the Jaynes-Cummings model with an additional Kerr medium, reduced density matrix, evolution of the field entropy.