

多原子体系与单模光场的多光子相互作用*

吴 强

姚 焜 郭光灿

(中国科学技术大学基础物理中心, 合肥 230026) (中国科学技术大学物理系, 合肥 230026)

摘 要 用狄克(Dicke)态的缀饰原子态的方法, 解出了多原子体系与单模光场的多光子相互作用下总体系的量子态随时间演化的精确解. 进而又研究了原子体系的粒子数反转, 光场的压缩度及反聚束效应随时间的演化. 通过数值计算, 发现了一些新的演化规律.

关键词 多光子相互作用, 压缩态, 反聚束效应.

1 引 言

长期以来, 人们对原子体系与光场的相互作用及由此引起的原子与光场的量子统计性质随时间的演化一直保持极大的兴趣. 自1963年J-C模型^[1]被提出后, 在量子光学中对J-C模型作了大量的研究, 至今仍有不少人在研究着. 在以往的工作中, 首先是研究单原子和各种光场(热光场^[2], 压缩光场^[3], 双色场^[4])的单光子相互作用, 继而又研究了单原子(双能级、三能级)与光场的多光子相互作用^[5~8], 直到N个原子(双能级^[9~10], 三能级^[11])和单模、双模光场的单光子作用.(这些可统称为广义J-C模型.) 在研究中发现了许多特征各异的非经典现象. 如原子粒子数反转的崩塌-复苏现象, 光场的压缩和反聚束效应等等.

值得提出的是, 尽管人们对许多J-C模型作了大量的研究. 但至今, 对多原子体系与单模光场的多光子相互作用(以后简称多原子-多光子作用)尚未有人作过较为详细的研究. 本文首先用狄克态的缀饰原子的方法, 得到了多原子-多光子作用下, 原子-光场体系量子态随时间演化的精确解. 进而又研究了原子体系的粒子数反转, 光场的压缩及反聚束效应随时间的演化规律. 发现了一些新的有趣的现象.

2 多原子-多光子作用下体系量子态的演化

在不计及热库作用时, N个二能级原子(原子间距小于光波波长)的系统和单模光场的多光子相互作用的哈密顿量(取旋转波近似及共振条件)可写为:

$$H = \hbar\omega_0 R_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g [R_+ a^K + R_- a^{+K}] \quad (1)$$

$$\omega_0 = K\omega, \quad R_z = \sum_{i=1}^N S_i^z, \quad R_\pm = \sum_{i=1}^N S_i^\pm$$

* 国家自然科学基金和国家科委资助的课题.

收稿日期: 1993年4月9日; 收到修改稿日期: 1993年6月29日

式中 a 为单模光场的湮灭算符, S_i^z, S_i^\pm 分别为第 i 个原子的粒子数反转与上升, 下降算符. g 为耦合系数.

按照角动量理论, 当原子间距在远小于光波波长时, N 个原子体系可以构成 Dicke 态, 用 $|r, m\rangle$ 表示^[12]. 若定义 $R^2 = R_z^2 + R_+R_-/2 + R_-R_+/2$, 则有:

$$\begin{aligned} R^2|r, m\rangle &= r(r+1)|r, m\rangle \quad (-N/2 \leq r \leq N/2) \\ R_z|r, m\rangle &= m|r, m\rangle \quad (m = r, r-1, \dots, -r) \end{aligned} \quad (2)$$

现令 $H = H_1 + H_2$, 其中 $H_1 = \hbar\omega_0 R_z + \hbar\omega a^+ a$, $H_2 = \hbar g[R_+ a^K + R_- a^{+K}]$, 且可证明, $[H_1, H_2] = 0$, 故 H_1, H_2 有共同的本征态. 又因为 $[H, H_1] = 0$, 所以 H_1 是运动常数. 于是可用 H_1 的不同本征值, 将 H 的希尔伯特空间分成许多子空间. 每个子空间的基矢组可由原子体系的狄克态与光场的福克(Fock)态的直积组成 $\{|r, r-l\rangle|n+kl\rangle\}$ ($r = N/2, -N/2, l = 0, \dots, 2r$) 在 H 作用下同一个 r 值 ($l = 0, \dots, 2r$) 构成一个封闭子空间.

设 N 个原子初始时刻都处于激发态(即, 原子体系处于狄克态的最高激发态 $|N/2, N/2\rangle$.) 光场处于福克态 $|n\rangle$. 则在 H 作用下, 整个体系始终处于基矢组 $\{|\textcircled{l}\rangle_n \equiv |N/2, N/2-l\rangle|n+Kl\rangle$ ($l = 0, \dots, N$) 构成的封闭子空间内. 在此子空间, 可将 H_2 的本征态表示为基矢组的线性迭加:

$$|\phi_n\rangle^{i_c} = \sum_{l=0}^N A_{n,l}^{i_c} |\textcircled{l}\rangle_n \quad (G = 0, \dots, N) \quad (3a)$$

反过来也可将基矢组表示为:

$$|\textcircled{l}\rangle_n = \sum_{G=0}^N A_{n,l}^{i_c*} |\phi_n\rangle^{i_c} \quad (3b)$$

式中 $|\phi_n\rangle^{i_c}$ 表示相应本征值为 $\lambda_c^{(n)}$, 初始光场为 $|n\rangle$ 的 H_2 的本征态. $A_{n,l}^{i_c}$ 为线性组合系数. 将(3a)代入 H_2 的本征方程, 再用 $\langle \textcircled{l} |$ 左乘可得

$$\sum_{l=0}^N (H_{ll}^{(2)} - \lambda_c^{(n)} \delta_{l,l'}) A_{n,l}^{i_c} = 0 \quad (l' = 0, \dots, N) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H_{ll}^{(2)} &= \langle \textcircled{l} | H_2 | \textcircled{l} \rangle_n = g \sqrt{(N-l)(l+1)(n+Kl+K)! / (n+Kl)!} \delta_{l, l+1} \\ &\quad + g \sqrt{(N-l')(l'+1)(n+Kl'+K)! / (n+Kl')!} \delta_{l, l'+1} \\ &= C_{l+1} \delta_{l, l+1} + C_l \delta_{l, l+1} \end{aligned} \quad (5)$$

(这里已令 $C_l = \sqrt{l(N-l+1)(n+Kl)! / [n+K(l-1)]!} g$, $\hbar = 1$), 将(5)式代入(4)式可得:

$$\sum_{l=0}^N [C_{l+1} \delta_{l, l+1} + C_l \delta_{l, l+1} - \lambda_c^{(n)} \delta_{l,l'}] A_{n,l}^{i_c} = 0 \quad (l' = 0, \dots, N) \quad (6)$$

再作变换:

$$A_{n,l}^{i_c} = B_{n,l}^{i_c} \quad (7a)$$

$$A_{n,l}^{i_c} = (\lambda_c^{(n)})^l B_{n,l}^{i_c} / C_1 C_2 \dots C_l \quad (7b)$$

将(7a), (7b)式代入(6)式可得到关于 $B_{n,l}^{i_c}$ 的方程组:

$$(\lambda_c^{(n)})^2 B_{n,l+1}^{i_c} - (\lambda_c^{(n)})^2 B_{n,l}^{i_c} + C_l^2 B_{n,l-1}^{i_c} = 0 \quad (1 \leq l \leq N-1) \quad (8a)$$

$$(\lambda_c^{(n)})^2 B_{n,N}^{i_c} - C_N^2 B_{n,N-1}^{i_c} = 0 \quad (8b)$$

(8a)式的严格解为:

$$B_{n,l}^{i_c} = B_{n,0}^{i_c} \sum_{\lambda=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^\lambda}{(\lambda_c^{(n)})^{2\lambda}} S_\lambda^{l-1} \quad (9)$$

式中求和上限 $[l/2]$ 表示小于 $l/2$ 的最大整数. $S_0^{l-1} = 1$. S_K^{l-1} 为全部可能的 K 个 C_i^2 ($i = 1, \dots,$

$l-1$) 的乘积之和, 在每个相乘因子中的 C_i^2 , 不能有相同或相邻的下标. (例如: $S_3^6 = C_1^2 C_3^2 C_5^2 + C_1^2 C_5^2 C_3^2 + C_3^2 C_5^2 C_1^2$). 将(9)式代入(7b)式可得所有展开系数:

$$A_{n,l}^{i,c} = \frac{B_{n,c_0}^{i,c}}{C_1 \cdot C_2 \cdots C_l} \sum_{x=0}^{l/2} \frac{(-1)^x S_x^{l-1}}{(\lambda_c^{(n)})^{2x-l}} \quad (1 \leq l \leq N) \quad (10)$$

式中 $B_{n,c_0}^{i,c}$ 可由本征态 $|\phi_n\rangle_{\lambda_c}$ 的归一化条件求出. 这样就求出了 H_2 的本征态的精确解. 将(9)式代入(8b)式可得求解本征值的高次方程. 相应的 H 的本征方程为:

$$H|\phi_n\rangle_{\lambda_c} = E_{\lambda_c}^{(n)} |\phi_n\rangle_{\lambda_c} \quad (11)$$

其中, $E_{\lambda_c}^{(n)} = \hbar(\omega_m + \frac{N}{2}\omega_0) + \lambda_c^{(n)}$. 若初始时刻光场处于任意态 $\sum C_n |n\rangle$. 则整个体系初始量子态可表示为:

$$|\phi(0)\rangle = \sum_n C_n |N/2, N/2\rangle |n\rangle. \quad (12)$$

设 $|\phi(t)\rangle$ 表示体系在 t 时刻的量子态. 则有:

$$|\phi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\phi(0)\rangle \quad (13)$$

根据(3a), (3b), (11), (12), (13)式可得:

$$|\phi(t)\rangle = \sum_n C_n \sum_{c=0}^N A_{n,c_0}^{i,c} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\lambda_c}^{(n)} t} \sum_{l=0}^N A_{n,c_l}^{i,c} |\textcircled{l}\rangle_n. \quad (14)$$

3 原子系统的粒子数反转随时间的演化

原子粒子数反转 $\langle R_z \rangle$ 反映了原子的动力学行为. 由(14)式可算得:

$$\langle \phi(t) | R_z | \phi(t) \rangle = \sum_n |C_n|^2 \sum_{c,c'=0}^N A_{n,c_0}^{i,c} A_{n,c'}^{i,c} e^{i(\lambda_{c'}^{(n)} - \lambda_c^{(n)})t} \sum_{m=0}^N A_{n,c_m}^{i,c} (\frac{N}{2} - m)$$

对初始光场为相干态的情况进行了数值计算. 通过数值计算, 发现原子体系的粒子数反转随时间的演化具有以下一些特点:

1) 在原子体系和光场的单光子作用时(简称单光子作用), 当初始光场平均光子数 ($\bar{n}_{初}$) 很小时, 无典型的崩塌-复苏图形, 而是不规则的振荡(图 1(a)); $\bar{n}_{初}$ 增加以后出现典型的崩塌-复苏图形(图 1(b), (c)). 通过比较可以发现, 随着原子个数 (n_0) 增加, 第二次以后的崩塌-复苏振荡的最大振幅与 $t=0$ 时的振幅之比变小; 崩塌-复苏曲线相对 gt 轴的不对称性增大(曲线上移), 这说明粒子数反转的时间平均值变大; 且较快地趋于无规状态.

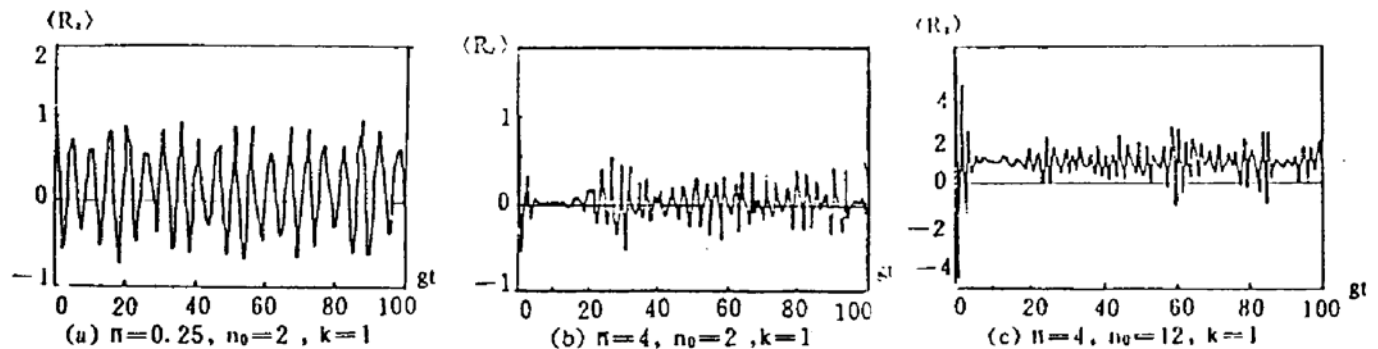


Fig. 1 Evolution of population inversion of N-atom system for one-photon interaction

2) 在多原子与光场的双光子相互作用时(简称双光子作用), (图 2)当 $\bar{n}_{初} \geq 4$ 时出现典型的崩塌-复苏图形. 和单光子作用时相比, 这时曲线具有较规则的周期性, 其周期小的多;

并可维持许多周期不趋于无规则状态. 作者认为双光子作用下崩塌-复苏图形周期变小可能与双光子作用下拉比频率变大有关.

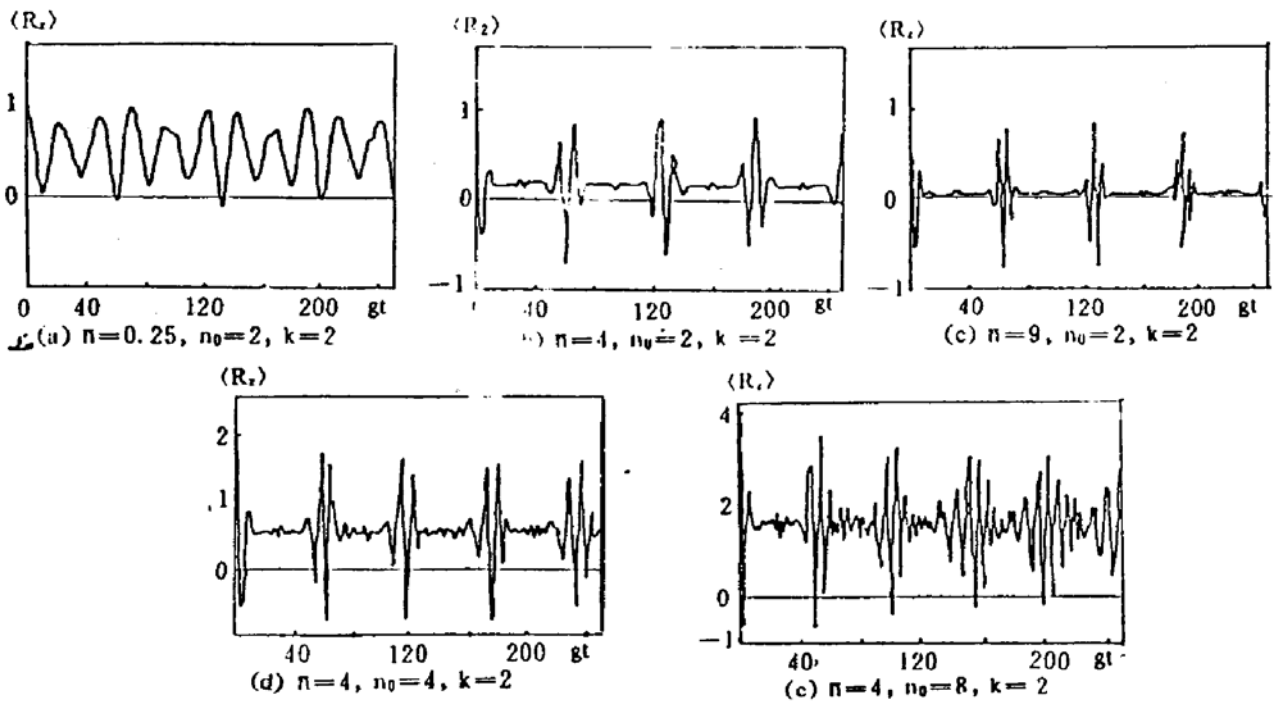


Fig. 2 Evolution of population inversion of N-atom system for two-photon interaction

3) 双光子作用时随着 n_0 的增加, 粒子数反转的崩塌-复苏曲线周期似变小, 相对 gt 轴的不对称性增大(曲线上移), (比较图 2(b), (d), (e)) 但当 $\bar{n}_{初}$ 增大时, 这种不对称性又减小. (比较图 2(a), (b), (c))

4 光场的压缩效应随时间的演化

定义光场的两个缓变的正交厄米算符^[13]:

$$X = \frac{1}{2} (ae^{j\omega t} + a^+e^{-j\omega t}), \quad y = \frac{1}{2j} (ae^{j\omega t} - a^+e^{-j\omega t}) \quad (16)$$

并定义压缩度:

$$S_x = 4\langle(\Delta X)^2\rangle - 1, \quad S_y = 4\langle(\Delta y)^2\rangle - 1 \quad (17)$$

若 S_x 或 S_y 小于零, 则可说光场被压缩. 式中 $\langle(\Delta x)^2\rangle$, $\langle(\Delta y)^2\rangle$ 表示正交厄米算符的涨落. 将 (16) 式代入 (17) 式可得:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= 2\langle\phi(t)|a^+a|\phi(t)\rangle + 2\text{Re}[\langle\phi(t)|a^2|\phi(t)\rangle e^{j2\omega t}] - 4[\text{Re}\langle\phi(t)|ae^{j\omega t}|\phi(t)\rangle]^2, \\ S_y &= 2\langle\phi(t)|a^+a|\phi(t)\rangle - 2\text{Re}[\langle\phi(t)|a^2|\phi(t)\rangle e^{j2\omega t}] - 4[\text{Im}\langle\phi(t)|ae^{j\omega t}|\phi(t)\rangle]^2, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将 (14) 式代入 (18) 式, 通过数值计算可得到 S_x, S_y 随时间演化的规律. 由计算结果发现:

1) 单光子作用时, $\bar{n}_{初}$ 较小时, 随 n_0 增加压缩变浅 (图 3(a)); $\bar{n}_{初}$ 较大时, 随 n_0 增加压缩变深 (图 3(b)). 且压缩只出现在最初一个粒子数反转的崩塌期.

2) 双光子作用时 (见图 4), 压缩度呈周期性变化曲线, 压缩效应的出现也具有周期性, 其周期与双光子作用下粒子数反转的周期相同. 光场的压缩总是出现在粒子数反转的振荡期. $\bar{n}_{初} \leq 9$ 时随 n_0 增加, 光场的压缩变浅.

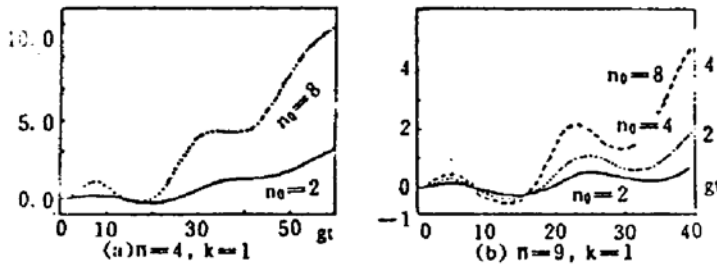


Fig. 3 Evolution of squeezing of light field for one-photon interaction

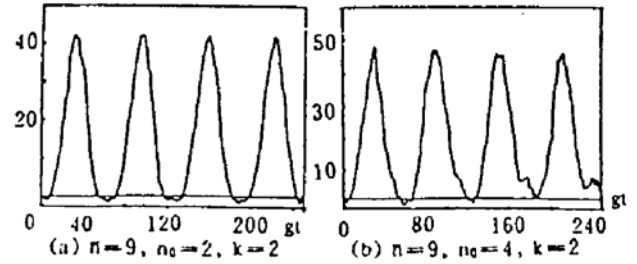


Fig. 4 Evolution of squeezing of light field for two-photon interaction

5 光场的反聚束效应随时间的演化

单模光场其二阶相干度 $g^{(2)}(0)$ 可表为^[14]：

$$g^{(2)}(0) = \langle a^+ a^+ a a \rangle / \langle a^+ a \rangle^2 \tag{19}$$

若 $g^{(2)}(0) > 1$ ，光场是聚束的；若 $g^{(2)}(0) < 1$ ，则光场是反聚束的. 将(14)式代入(19)式，得到光场的二阶相干度随时间的演化. 通过计算可以发现它有如下特点：

1) 单光子作用时(图5)， $\bar{n}_{初} = 0.25$ 时，曲线呈不规则振荡. $\bar{n}_{初} \geq 4$ 时，曲线呈崩塌-复苏图形，其周期与粒子数反转图形的变化周期相同. 反聚束总是出现在粒子数反转的振荡期. 随着 $\bar{n}_{初}$ 的减少，反聚束效应增强[比较图 5(a)(b)(c)]. 并且，当 $\bar{n}_{初} = 4$ 时，随 n_0 增大光场反聚束效应减弱[比较图 5(b)，图 5(d)]； $\bar{n}_{初} = 9$ 时，随 n_0 增大，反聚束效应增强[比较图 5(c)，图 5(e)].

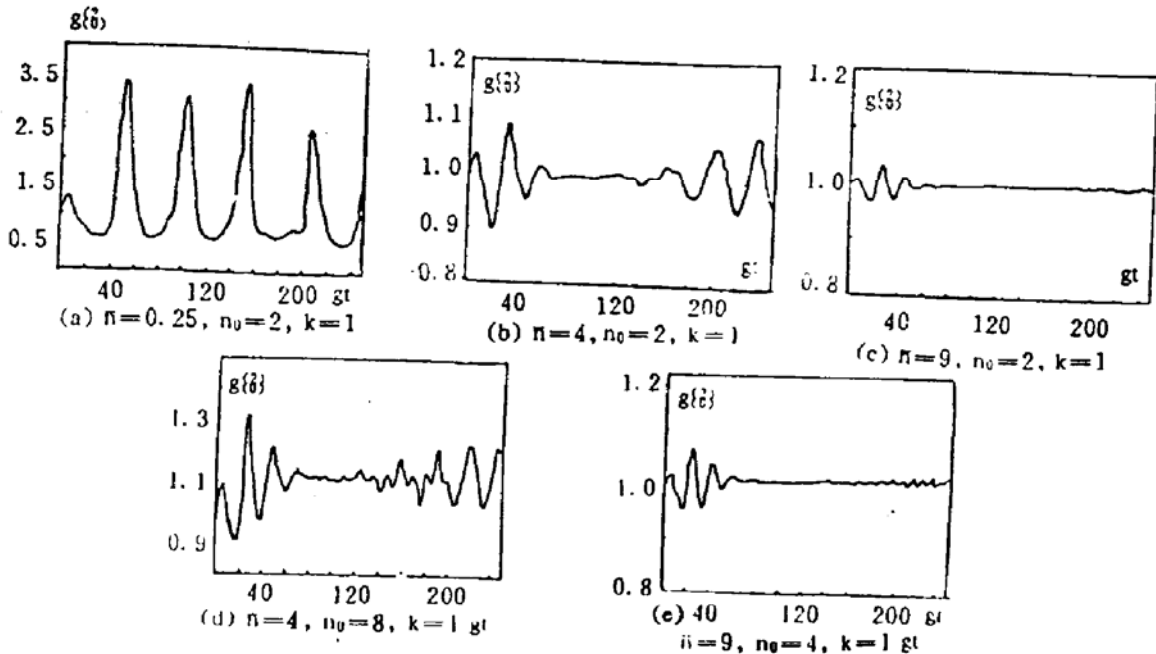


Fig. 5 Evolution of photon antibunching of light field for one-photon interaction

2) 双光子作用时(图 6)，光场的二阶相干度随时间的演化也出现崩塌-复苏图形，但其周期与双光子作用下的粒子数反转的周期相同，而远小于单光子作用时的二阶相干度的变化周期. 在 $\bar{n}_{初} \leq 9$ 时，随 n_0 增大，光场的反聚束效应均减弱.

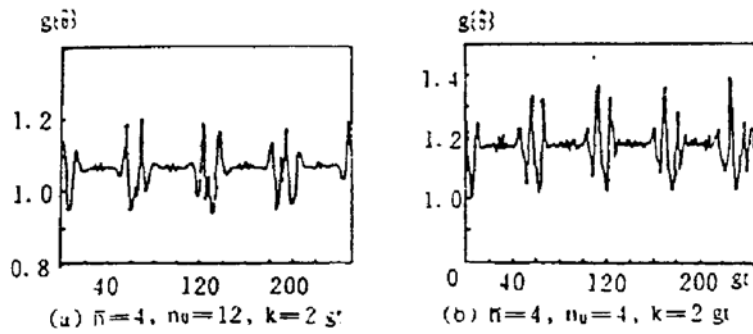


Fig. 6 Evolution of photon antibunching of light field for two-photon interaction

参 考 文 献

- [1] E. T. Jaynes, F. W. Cumming, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, 1963, **51**(1) : 89~97
- [2] P. L. Knight, P. M. Radmore, Quantum revivals of a two-level system driven by chaotic radiation. *Phys. Lett. (A)*, 1982, **90**(7) : 342~347
- [3] G. J. Milburn, Interaction of a two-level atom with squeezed light. *Opt. Acta*, 1984, **31**(6) : 671~679
- [4] 罗耕贤, 郭光灿, 双色场 Jaynes-Cummings 模型的量子理论. *物理学报*, 1988, **37**(12) : 1956~1964
- [5] 周 鹏, 彭金生, 多光子 Jaynes-Cummings 模型的演化. *光学学报*, 1990, **10**(9) : 837~844
- [6] 罗耕贤, 郭光灿, 压缩态 J-C 模中的崩塌-复原现象. *光学学报*, 1990, **10**(1) : 1~6
- [7] D. L. Lin, Xiaoshen Li, Nonresonant interaction of a three-level atom with cavity fields. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**(4) : 1933~1940
- [8] Sunghyuck An, Murray Sargent, Quantum theory of multiwave mixing. X. Two-photon three-level model. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**(4) : 1841~1847
- [9] Fuli Li, Xiaoshen Li, D. L. Lin *et al.*, George, squeezing of many-atom radiation in an optical cavity. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **41**(5) : 2712~2717
- [10] 顾 敏, 谭维翰, 双原子系统共振荧光的反聚束效应. *光学学报*, 1989, **9**(4) : 296~301
- [11] S. V. Lanwade, B. N. Jagatap, Cooperative effects in a system of strongly driven three-level atoms. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**(2) : 683~693
- [12] 郭光灿著, 量子光学, 第一版, 北京, 高等教育出版社, 1990, 405
- [13] A. S. Shumovsky, F. L. Kien *et al.*, Squeezing in the multiphoton Jaynes-Cummings model. *Phys. Lett. (A)*, 1987, **123**(6,7) : 351~354
- [14] R. Loudon, The quantum theory of light. Clarendon press, Oxford, 1983, 211

Multi-Photon Interaction Between N-Atom and Single-Model Light Field

Wu Qiang

(The Center of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Yao Kun Guo Guangcan

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

(Received 9 April 1993; revised 29 June 1993)

Abstract The exact solution to evolution of quantum state of total system for multi-photon interaction between N-atom and single-model light field has been obtained by using dressed dick' s state method.

We have also studied the evolution of population inversion of N-atom system and the quantum statistical properties of light field and found some new phenomena of the system.

Key words multi-photon interaction, squeezed state antibunching effect.