

# 沿非线性界面传输的 TM 波传播常数的解析解

王子华

陈 勤

(上海科学技术大学光纤研究所, 上海 201800) (上海科学技术大学物理系, 上海 201800)

**摘 要** 本文得到了沿一线性介质与非线性介质界面传输的 TM 波精确的色散关系和传播常数的解析计算公式, 导出了计算非线性介质中传输功率流的积分公式. 本文方法计算传播常数及功率流的优点是可不先知道电场分布.

**关键词** 非线性平面光波导, 色散关系.

## 1 引 言

光在 Kerr 型(介电常数与光强成正比)非线性介质中传输会产生一些有趣现象<sup>[1~3]</sup>. 这些现象在线性光波导理论中是没有的, 并将在光信息处理方面得到广泛的应用<sup>[3]</sup>. 已经有足够多的文献对线性和非线性介质界面传输的 TE(横电)波进行了深入的探讨, 且有了解析解<sup>[3~6]</sup>. 而对 TM(横磁)波, 由于两个分别平行和垂直于界面电场分量的存在, 使问题大为复杂化<sup>[2]</sup>, 因此至今未得到解析解. Mihalache 等人<sup>[7]</sup>和 Boardman 等人<sup>[8]</sup>在一阶积分式的基础上, 导出了线性和非线性单一界面传输的 TM 波精确的色散方程. 色散方程是两个联立方程组且必须用数值方法求解. 用文献[7]和[8]的方法求解色散方程时可以不先知道电场分布, 然而在计算非线性介质中传输的功率流时, 还是需要详细的电场分布.

本文在文献[7]的基础上, 导出沿线性和非线性界面传输的 TM 波的精确色散关系, 它只是一个二次方程, 因而可直接得到传播常数的解析表达式. 此外, 无论在计算传播常数还是在计算非线性介质中传播的功率流时, 都不必先知道电场分布. 本文方法使单一界面非线性问题的求解变得十分简单.

## 2 非线性界面 TM 波传播常数的解析计算

根据麦克斯韦方程, 在非线性介质中 TM 波各场分量满足关系<sup>[7]</sup>:

$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{1}{\beta} (k_0^2 \epsilon_{zz} - \beta^2) E_x, \quad \frac{d(\epsilon_{zz} E_z)}{dz} = -\beta \epsilon_{zz} E_x, \quad H_y = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_{zz}}{\beta} E_x \quad (1)$$

这里设电场矢量为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [iE_x(z)\mathbf{x} + E_z(z)\mathbf{z}] \exp [i(\omega t - \beta x)] + c. c. \quad (2)$$

式中已假定两电场分量有  $(\pi/2)$  的相位差,  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi/\lambda$ ,  $\omega$  为频率,  $\lambda$  为波长,  $\beta$  为传播常数. 非线性介电常数张量的各个分量为 Kerr 型, 即

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_z + \alpha_1 E_z^2 + \alpha_2 E_x^2, \quad \epsilon_{zz} = \epsilon_x + \alpha_1 E_x^2 + \alpha_2 E_z^2 \quad (3)$$

其中  $\epsilon_z$  和  $\epsilon_x$  为零电场时的介电常数分量,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  为非线性系数. 对于 TM 导波(当  $z \rightarrow \pm \infty$  时,  $E, dE/dz \rightarrow 0$ ), (1)式有一阶积分式为

$$\left(\frac{dE_x}{dz}\right)^2 = \beta^2 E_x^2 - k_0^2 [\epsilon_z E_x^2 + \epsilon_x E_z^2 + \frac{\alpha_1}{2} (E_x^4 + E_z^4) + \alpha_2 E_x^2 E_z^2], \quad (4)$$

将(1)式代入(4)式就得到一个联系两个电场分量  $E_x$  和  $E_z$  的关系式

$$\beta^2 (\epsilon_z E_x^2 + 3\alpha_1 E_x^4/2 + \alpha_2 E_x^2 E_z^2 - \epsilon_x E_z^2 - \alpha_1 E_z^4/2) = k_0^2 E_x^2 (\epsilon_z + \alpha_1 E_x^2 + \alpha_2 E_z^2)^2 \quad (5)$$

现在考虑一个  $z=0$  的界面, 其上为半无限大的非线性介质, 其下为半无限大的线性, 各向同性介质( $\epsilon = \epsilon_s, z < 0$ ). 在线性介质中,  $E_x(z)$  和  $E_z(z)$  的解为

$$E_x(z) = E_{0x} \exp(q_s z), \quad E_z(z) = (-\beta/q_s) E_{0x} \exp(q_s z) \quad (6)$$

式中  $q_s^2 = \beta^2 - k_0^2 \epsilon_s$  ( $\epsilon_s$  为介质情况下, 要求  $\beta^2 > k_0^2 \epsilon_s$ ),  $E_{0x} = E_x(0)$

在界面  $z=0$  处, 应用边界条件

$$\epsilon_{zz} E_{0z}^+ = \epsilon_s E_{0z}^-, \quad E_{0x}^+ = E_{0x}^- = E_{0x} \quad (7)$$

式中“+”和“-”代表界面的上面和下面, 得到

$$E_{0x} = -\frac{\epsilon_{zz} q_s}{\epsilon_s \beta} E_{0z}^+ \quad (8)$$

将  $q_s = (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_s)^{1/2}$  代入(8)式得

$$\beta^2 (\epsilon_{zz}^2 E_{0z}^{+2} - \epsilon_s^2 E_{0x}^2) = k_0^2 \epsilon_s \epsilon_{zz}^2 E_{0z}^{+2} \quad (9)$$

(5)式和(9)式联立, 消去  $\beta$ , 得到下面关于电场边界值的方程

$$\begin{aligned} & [(\epsilon_s \alpha_1/2) + \alpha_2^2 E_{0z}^{+2}] E_{0x}^4 + [\epsilon_s \epsilon_x - \epsilon_s^2 + \alpha_2 (2\epsilon_z - \epsilon_s + 2\alpha_1 E_{0z}^{+2}) E_{0z}^{+2}] E_{0x}^2 \\ & + [\epsilon_z^2 + \epsilon_s \epsilon_x + (2\epsilon_z \alpha_1 - 3\epsilon_s \alpha_1/2 + \alpha_1 E_{0z}^{+2}) E_{0z}^{+2}] E_{0z}^{+2} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

这是一个  $E_{0x}^2$  的一元二次方程, 由此可以求  $E_{0x}$  为

$$\begin{aligned} E_{0x} &= \pm \left[ \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a} \right]^{1/2} \\ a &= \epsilon_s (\alpha_1/2) + \alpha_2^2 E_{0z}^{+2} \\ b &= \epsilon_s \epsilon_x - \epsilon_s^2 + \alpha_2 (2\epsilon_z - \epsilon_s + 2\alpha_1 E_{0z}^{+2}) E_{0z}^{+2} \\ c &= [\epsilon_z^2 + \epsilon_s \epsilon_x + (2\epsilon_z \alpha_1 - 3\epsilon_s \alpha_1/2 + \alpha_1 E_{0z}^{+2}) E_{0z}^{+2}] E_{0z}^{+2} \end{aligned} \quad (12)$$

将(11)式代入(9)式可求得  $\beta$  为

$$\beta = \left[ \frac{k_0 (\epsilon_z + \alpha_1 E_{0z}^{+2} + \alpha_2 E_{0x}^2) E_{0z}^{+2}}{\epsilon_z E_{0z}^{+2} + 3\alpha_1 E_{0z}^{+4}/2 + \alpha_2 E_{0x}^2 E_{0z}^{+2} - \epsilon_x E_{0x}^2 - \alpha_1 E_{0z}^4/2} \right]^{1/2} \quad (13)$$

与线性导波理论不同, 这里  $\beta$  是电场边界值  $E_{0z}^+$  的函数. 确定一个  $E_{0z}^+$  的值, 由(11)式求  $E_{0x}$ , 从而可求得  $\beta_0$  用文献(7)的方法求  $\beta$  必须解两个联立方程组并且要用数值方法求解, 而用本文方法只须解一个一元二次方程, 并且有直接的解析计算公式.

### 3 不通过场分布计算传输功率流方法

非线性单一界面传输的 TM 波平均功率沿  $x$  方向, 且可表示为<sup>[7]</sup>

$$P = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z H_y dz = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_s \beta}{4q_s^3} E_z^2 + \frac{\omega \epsilon_0}{2\beta} \int_0^{\infty} \epsilon_{zz} E_z^2 dz \quad (14)$$

(14)式中右边第一项为线性介质中的功率流, 第二项为非线性介质的功率流, 式中已考虑了  $E_x$  和  $E_z$  电场分量之间的  $\pi/2$  相差位, 且已经取了实部. 借助于(1)式, 非线性介质中传播功率流可变换为对  $E_z$  的积分

$$P(z > 0) = \frac{\omega \epsilon_0}{2\beta} \int_0^{\infty} \epsilon_{zz} E_z^2 dz = \frac{\omega \epsilon_0}{2} \int_{E_{0z}}^0 \frac{\epsilon_{zz} E_z}{k_0^2 \epsilon_{zz} - \beta^2} dE_z \quad (15)$$

积分上下限的确定是根据  $E_z(0) = E_{0z}$  以及  $E_z(\infty) = 0$ , 因为必须是有限的. (15)式积分可以用最简单的数值积分方法计算, 因为对于每一个  $E_z$  值, 由方程(7)可求得对应的  $\beta$  值, 然后通过(3)式求  $\epsilon_{zz}$ . 当积分通过  $\beta^2 = k_0^2 \epsilon_{zz}$  这一奇异点的时候, 被积函数为无穷大. 如果这一情况发生, 可以将(15)式变换为对  $E_z$  的积分. 由(1)前两式可得

$$\frac{dE_z}{d\beta} = \frac{E_z(2\alpha_1 E_z^2 + \epsilon_{zz})(\beta^2 - k_0^2 \epsilon_{zz})}{\beta^2 \epsilon_{zz} E_z - 2\alpha_2 E_z E_z^2 (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_{zz})} \quad (16)$$

将(16)式代入(5)式得关于  $E_z$  的积分为

$$P(z > 0) = \frac{\omega \epsilon_0}{2} \int_{E_{0z}}^0 \frac{-\epsilon_{zz} E_z^2 (2\alpha_1 E_z^2 + \epsilon_{zz}) dE_z}{E_z [\beta^2 \epsilon_{zz} - 2\alpha_2 E_z^2 (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_{zz})]} \quad (17)$$

虽然(17)式也有一个奇异点  $E_z = 0$ , 但与(15)式的奇异点  $\beta^2 = k_0^2 \epsilon_{zz}$  不可能同时发生, 因此(15)式和(17)式可以用于不同的积分区域, 避开各自的奇异点, 最后得到非线性介质中传输的功率流. 无论是(15)式还是(17)式, 电场的解  $E_x(z)$  和  $E_z(z)$  并不需要, 在计算积分时了解电场的定性分布就足够了.

## 4 讨 论

设  $\omega = 3.66 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\epsilon_r = \epsilon_z = 2.405$ ,  $\epsilon_s = -2.5$ ,  $\alpha_1 = 6.4 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \text{V}^{-2}$ , 在  $\alpha_1 = 3\alpha_2$  和  $\alpha_1 = \alpha_2$  两种情况下, 用本方法计算了传播常数  $\beta$  和功率流(如图1所示), 得到与文献[7]一样的结果(示于文献[7]图1).

本文得到了非线性单一界面传输的 TM 波精确的色散方程, 它是一个一元二次方程, 有传播常数  $\beta$  的解析计算公式. 无论是求解色散方程还是计算非线性介质中的功率流都不必行求解场方程. 与文献[7,8]相比, 本文方法的优点是显而易见的.

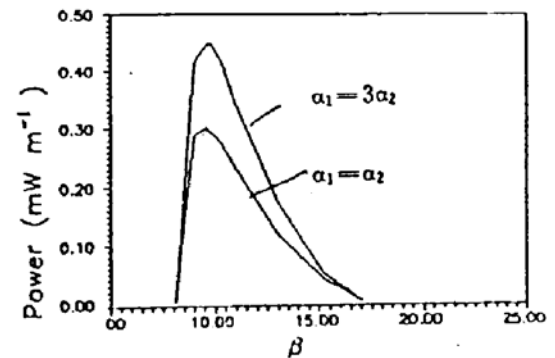


Fig. 1 Dispersion curves parameter values  $\omega = 3.66 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\epsilon_r = \epsilon_z = 2.405$ ,  $\epsilon_s = -2.5$ ,  $\alpha_1 = 6.4 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \text{V}^{-2}$

## 参 考 文 献

- [1] A. D. Boardman, A. A. Maradudin, C. I. Stegeman *et al.*, Exact theory of nonlinear p-polarized optical waves. *Phys. Rev. (A)*, 1987, A25: 1159
- [2] K. M. Leung, P-polarized nonlinear surface polaritons in materials with intensity-dependent dielectric functions.

- Phys. Rev. (B)*, 1985, **B22** : 5093
- [3] G. I. Stegeman, C. T. Seaton, J. Ariyasu *et al.*, Nonlinear electromagnetic waves guided by a single interface. *J. Appl. Phys.*, 1985, **58** : 2453
- [4] U. Langbein, Nonlinear guided waves in saturable nonlinear media. *Opt. Lett.*, 1985, **10** : 571
- [5] W. J. Tomlinson, Surface wave at a nonlinear interface. *Opt. Lett.*, 1980, **5** : 323
- [6] D. Marcuse, Reflection of a gaussian beam from a nonlinear interface. *Appl. Opt.*, 1980, **19** : 3130
- [7] D. Mihaiche, G. I. Streman, C. T. Seaton *et al.*, Exact dispersion relations for transverse magnetic polarized guided waves at a nonlinear interface. *Opt. Lett.*, 1987, **12** : 187
- [8] A. D. Boaroman, T. Twardowski, A. Shivarova *et al.*, Surface-guided nonlinear TM waves in planar waveguides. *IEEE Pro.*, 1987, **134**(1) : 152
- [9] G. I. Stegeman, Guided wave approaches to optical bistability. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1982, **QE-18** : 1610

## Analytic Method for Calculating Propagation Constant of TM Waves at a Nonlinear Interface

Wang Zihua

(Wave Science Laboratory, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai 201800)

Chen Qin

(Physics Department, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai 201800)

(Received 7 December 1992; revised 3 March 1993)

**Abstract** Exact dispersion relations and an analytic formula for calculating propagation constant and the power flux for TM guided waves at a nonlinear interface have been obtained. The advantage of this method is that the detailed field distributions are not necessarily known for solving the dispersion relations and also for calculating the power flux.

**Key words** nonlinear planar optical waveguide, dispersion relation.