

周期结构介质中 Floquet-Bloch 波的波矢量图

马春生

(吉林大学电子工程系, 集成光电子学国家重点联合实验室, 长春 130023)

摘 要 利用波矢量图分析了周期结构介质中 Floquet-Bloch 波的色散规律. 实例计算结果表明, 波矢量图中的波矢禁带的产生和变化强烈地依赖于光波长和结构参量, 随着周期长度的增大或光波长的减小, 波矢量图将变得更加复杂, 并将产生更多的波矢禁带.

关键词 周期介质, Floquet-Bloch 波, 色散, 波矢量图, 波矢禁带.

1 引 言

Floquet-Bloch 理论^[1,2]广泛地用于分析和阐述光在周期结构介质中的各种传输现象, 如反射、折射、散射、干涉和衍射等等.^[3~7]近年来应用这一理论已发现某些周期结构介质中存在所谓的“光子禁带”, 且已为某些实验所证实.^[8~16]周期结构介质中的光子禁带与半导体晶体中的电子禁带非常相似, 因此这种材料被称之为“介质晶体”^[17]. 介质晶体中, 在光子禁带的波长范围内没有光子存在, 不能产生光的发射和吸收. 这种性质反映在 Floquet-Bloch 波的波矢量图则出现了所谓的“波矢禁带”^[1,6,7]这些波矢禁带出现在波矢空间的栅矢半长点上. Yeh 等人指出波矢禁带的宽度粗略地正比于周期介质相对介电常数的调制深度^[4,7]. Yablonovitch 等人也指出如果周期结构介质的相对介电常数的调制深度足够大, 在这种介质中则能产生光子禁带, 并且他们正在致力于设计和制作这样的 GaAs 光子禁带材料^[17].

周期结构介质中的 Floquet-Bloch 波的色散现象可以利用波矢量图进行阐明, 可得到十分清楚的直观理解.^[1,6,7]本文首先通过求解标量波方程导出了周期结构介质中 Floquet-Bloch 波满足的色散方程, 然后利用该色散方程进行了实例计算, 给出了一些由简单到复杂的波矢量图, 并讨论了图中波矢禁带的性质, 发现波矢禁带与光波长及结构参量之间的关系比已往某些文献^[1,6,7]报道的还要复杂.

2 Floquet-Bloch 波的色散

周期结构介质的横截面图如图 1 所示, 其相对介电常数由一方波调制, 调制深度为 M , 调制周期长度为 A . 每一周期中含有两层介质, 其相对介电常数分别为 $\epsilon_1 = \epsilon_0 + M$ 和

$\epsilon_2 = \epsilon_{av} - M$, 式中 $\epsilon_{av} = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$ 为平均值, $M = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/2$ 为调制深度. a 和 b 分别为两层介质的厚度, $\Lambda = a + b = 2\pi/|K|$, K 为栅矢量. 直角坐标系中选取 x 轴沿 K 方向, z 轴平行于介质界面, 并令在周期结构介质中传输的光是 TE 波即其电场偏振沿 y 方向.

在周期结构介质中传输的电磁波, 其中最简单的形式是 Floquet-Bloch 波, 它与在均匀介质中传输的电磁波最简单的形式是平面波相类似^[18]. 按照 Floquet-Bloch 理论, 一系列 FB 波可以表示成一组平面波的叠加, 这些平面波称为空间谐波, 具有波矢量 k_n 和常数振幅 V_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 因此 FB 波的电场 $E(r)$ 可表示为:

$$E(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \exp(-j k_n r),$$

$$k_n = k_0 + nK, \text{ 或 } k_{nx} = k_{0x} + nK,$$

$$k_{nz} = k_{0z}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

式中 k_0 为第 0 阶空间谐波的波矢量, k_{0x} 和 k_{0z} 为其在 x 和 z 方向上的分量, 同样, k_n 及 k_{nx} , k_{nz} 为第 n 阶空间谐波的波矢量及其分量, 从(1)式可以看出, 对于某一自由选择的初始波矢量 k_0 , 仅允许存在一组分立的高阶波矢量 k_n , 这是因为 n 的值只取整数. 从(1)式还可看出, 对于一系列 FB 波, 所有空间谐波具有相同的波矢 z 分量 k_{0z} .

FB 波满足下述二维标量波方程(即 $\partial/\partial y = 0$)

$$\nabla^2 E(r) + k^2 E(r) = 0, \quad (2)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$ 为真空中波数, λ 为真空中光波长. 把(1)式代入(2)式后两端同乘因子 $\exp(jk_n \cdot r)$, 然后从 $x = 0$ 到 $x = \Lambda$ 对 x 积分可得到下述线性方程组

$$\sum_{n'=-\infty}^{\infty} (F_{n'n} - k_n^2 \delta_{n'n}) V_{n'} = 0, \quad (n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3)$$

令(3)式中的系数行列式为零即可得到 FB 波满足的色散方程为

$$\det |F_{n'n} - k_n^2 \delta_{n'n}| = 0 \quad (n', n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4)$$

式中的矩阵元 $F_{n'n}$ 由下式规定

$$F_{n'n} = \begin{cases} k^2 \epsilon_{av} \left[1 + \frac{M(a-b)}{\epsilon_{av} \Lambda} \right], & (n' = n) \\ j \frac{k^2 M}{(n' - n)\pi} \{ 1 - \exp[j(n' - n)Ka] \}, & (n' \neq n) \end{cases} \quad (5)$$

求解(4)式可得到波矢空间中的 k_0 的轨迹, 进而得到 k_n 的轨迹, 则可画出相应的波矢量图. 把所求得的 k_0 和 k_n 的值代入(3)式则可得到 V_n 的值, 然后把 V_n , k_n 的值代入(1)式可最后得到 FB 波的确切表达形式.

3 波矢量图和波矢禁带

波矢量图是 FB 波色散关系(1)式的图形表示, 由允许存在于周期结构介质中的所有空间谐波的波矢量组成. 这些波矢量可通过求解色散方程(4)得到. 图 2 表示波矢量图中波矢禁带的产生和变化对周期长度 Λ 的依赖情况. 在此种情况中固定了光波长 $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$. 其它有

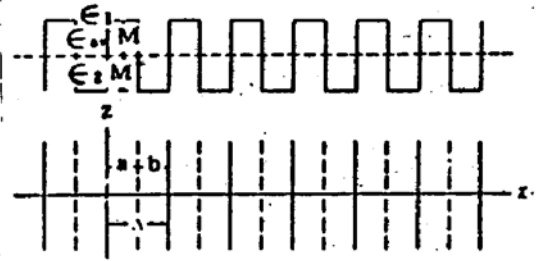


Fig. 1 The cross-section and the relative dielectric constant profile of the periodic dielectric structure

关参量选为：平均相对介电常数 $\epsilon_{av} = 1.65^2$ ，调制深度 $M = 0.5$ ， $a = b$ ，周期长度 $\Lambda = a + b = 0.325, 0.65, 0.975, 1.3 \mu\text{m}$ 。

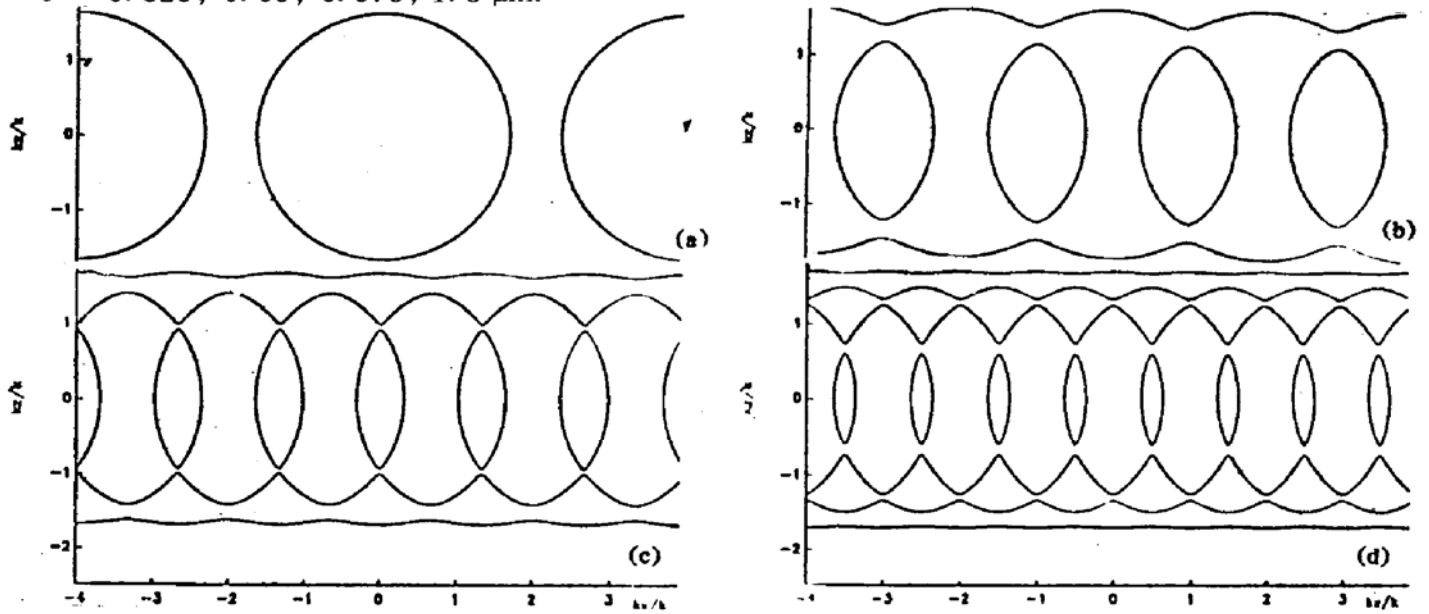


Fig. 2 The wavevector diagrams with different values of the normalized grating vector K/k . $\epsilon_{av} = 1.65^2$, $M = 0.5$, $a = b$, $K/k = \lambda/\Lambda = 4$ (a), 2 (b), $4/3$ (c) and 1 (d)

由(4)式和(5)式可以看出，当调制深度 $M = 0$ 时，(5)式中的矩阵元 $F_{r,r} = k^2 \epsilon_{av} \delta_{r,r}$ ，则解(4)式仅能得到一个重根 $k_x = k_0 = k \in \frac{\lambda}{\Lambda}$ 。这意味着当周期结构不存在时($M = 0$)，波矢量图只是一个圆，其圆心为坐标原点，其半径为 $k_0/k = \epsilon_{av}^{\frac{1}{2}}$ 。即在这种情况下周期结构介质退化为均匀介质，且 FB 波退化成平面波在其中传输。然而，当周期结构存在时($M \neq 0$)，Floquet-Bloch 理论表明对于这个圆上的每一点(即对应于一个 k_0)，将出现无限多个高阶波矢量 k_x 与之对应，相互以间距 K/k 而分离，因而这一圆将被重复无限多次，如图 2a 所示(此时取 $\Lambda = 0.325 \mu\text{m}$)。由于此时重复圆的分离间距的半长 $K/2k = \lambda/2\Lambda = 2$ 大于圆的半径 $k_0/k = \epsilon_{av}^{\frac{1}{2}} = 1.65$ ，这些重复圆不会彼此相交，因而波矢量图由无限多相互分离的圆组成，不会出现所谓的波矢禁带。如果周期长度 Λ 增大，这些重复圆之间的分离间距 K/k 将随之减小，并且那些高阶重复圆向坐标原点趋近。一旦分离间距的半长小于圆的半径，例如在图 2(b) 的情况中 $\Lambda = 0.65 \mu\text{m}$ ， $K/2k = \lambda/2\Lambda = 1$ ，则这些重复圆将彼此相交。然而，周期结构的存在不仅引起圆的重复，而且还改变了重复圆的形状，在它们本应通过的一些位置上形成了所谓的波矢禁带，这可从图 2(b) 中看出。如果周期长度进一步增大，则重复圆间的分离间距将变得更小，并且重复圆间彼此相交的次数将越来越多，因此产生的波矢禁带也越来越多，波矢量图会变得越来越优美和复杂，这可从图 2(c)(取 $\Lambda = 0.975 \mu\text{m}$)和图 2(d)(取 $\Lambda = 1.3 \mu\text{m}$)中看出。

在上面的所有情况中，重复圆皆以 K/k 的距离而相互分离，并且波矢禁带皆出现在 $k_x/k = nK/2k = n\lambda/2\Lambda$ 的位置上，式中 $n = 0, \pm 1, 2, \dots$ 或 $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ，这可用布拉格条件加以证明。波矢禁带的存在意味着光不可能具有波矢禁带范围内的波矢量，换言之，具有这样波矢量的光完全不能在该周期结构中进行传输。

当周期长度 Λ 固定时，波矢量图中的波矢禁带的产生和变化对光波长 λ 的依赖情况与波矢禁带对周期长度 Λ 的依赖情况十分相似，光波长 λ 减小的情况与周期长度 Λ 增大的情况相对应。例如取 $a = b$ ，固定 $\Lambda = a + b = 0.6 \mu\text{m}$ ，并取 $\epsilon_{av} = 1.65^2$ ， $M = 0.5$ ， $\lambda = 2.4, 1.2, 0$ 。

8, 0.6 μm , 相应的波矢量图分别与图 2 中的(a)、(b)、(c)、(d)相同。

图 3 显示了调制深度 M 对波矢量图中波矢禁带宽度的影响. 取 $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$, $\Lambda = a + b = 0.65 \mu\text{m}$, $a = b$, $\epsilon_{ar} = 1.65^2$, $M = 0.3, 1.0, 1.7$. 可以看出波矢禁带宽度随着调制深度 M 的增大而增大. 如果调制深度 M 不断地增大, 波矢禁带将变得越来越宽, 波矢量图内部的那些封闭圆环将变得越来越小, 最后将缩小成一些等距分布的点, 然后消失.

图 4 显示了比率 $\gamma = a/\Lambda$ 对波矢量图中波矢禁带宽度的影响, 取 $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$, $\Lambda = a + b = 0.65 \mu\text{m}$, $\epsilon_{ar} = 1.65^2$, $M = 0.5$, $\gamma = 0.75, 0.5, 0.25$. 相应的 a, b 之值可由式 $a = \gamma \Lambda$ 及 $b = (1 - \gamma)\Lambda$ 确定. 很明显当 $\gamma = 0$ 时, $\Lambda = b$, 周期结构消失并退化为具有较低介质电常数 $\epsilon_2 = \epsilon_{ar} - M$ 的均匀介质, 相应的波矢量图只是一个圆心在坐标原点半径为 $k_0/k = \epsilon_{ar}^{-1/2}$ 的圆, 其上不会出现波矢禁带. 同样当 $\gamma = 1$ 时, $\Lambda = a$, 周期结构也将消失并退化为具有较高介电常数 $\epsilon_1 = \epsilon_{ar} + M$ 的均匀介质, 相应的波矢量图也只是一个圆心在坐标原点半径为 $k_0/k = \epsilon_{ar}^{1/2}$ 的圆, 其上也不会出现波矢禁带. 当 γ 由 0 增大到 1 时, 波矢禁带将出现并且其宽度将从 0 增大到某一极大值, 接着又从该极大值减小到 0, 可以推断当 $\gamma = 0.5$ 即 $a = b$ 时波矢禁带将会具有最大宽度.

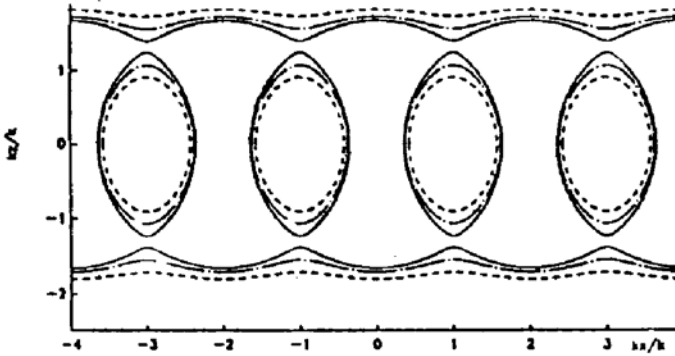


Fig. 3 The wavevector diagrams with different values of the modulation depth M . $\epsilon_{ar} = 1.65^2$, $a = b$, $K/k = \lambda/\Lambda = 2$, $M = 0.3$ (solid curves), 1 (dash-dotted curves) and 1.7 (dashed curves)

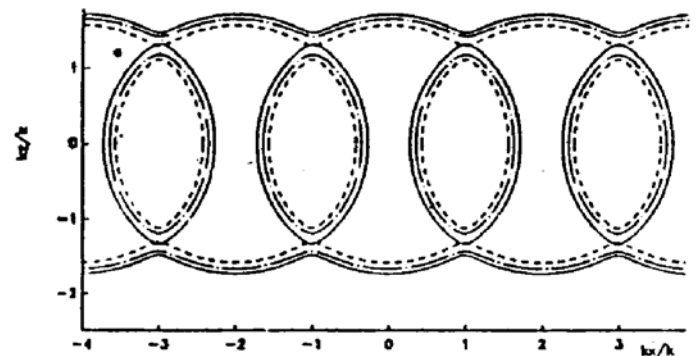


Fig. 4 The wavevector diagrams with different values of the ratio $\gamma = a/\Lambda$. $\epsilon_{ar} = 1.65^2$, $M = 0.5$, $K/k = \lambda/\Lambda = 2$, $\gamma = 0.75$ (solid curves), 0.5 (dash-dotted curves) and 0.25 (dashed curves)

结 论 综上所述, 周期结构介质可以认为是所谓的“介质晶体”, 其中可存在光子禁带, 周期结构介质的这种性质也可借助于波矢量图加以说明. 本文利用 FB 波的特征方程对某些周期结构进行了实例计算, 并给出了相应的波矢量图. 这些波矢量图由简单到复杂, 反映了波矢禁带的产生及变化规律, 表明在波矢禁带的产生及变化中, 光波长及某些结构参量起着重要的作用. 利用这些依赖关系, 可从理论上确定出所需要的光子禁带, 并有可能在实际上设计和制作出所需要的介质晶体材料.

本工作是作者于 1992 年 4 月至 10 月在英国南安普敦大学光电子学研究中心访问期间完成的, 得到了 D. N. Payne 教授的支持和关心, P. St. J. Russell 博士与作者进行了多次讨论并给予许多有益的建议, 在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- [1] R. S. Chu, T. Tamir, Wave propagation and dispersion in space-time periodic media. *Proc. IEEE*, 1992, 119 (7): 797~806

- [2] C. Elachi, Waves in active and passive periodic structures: A review. *Proc. IEEE*, 1976, **64**(12): 1666~1698
- [3] R. S. Chu, T. Tamir, Guided-wave theory of light diffraction by acoustic microwaves. *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, 1970, **MTT-18**(8): 486~504
- [4] P. Yeh, A. Yariv, C. S. Hong, Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(4): 423~438
- [5] P. St. J. Russell, Interference of integrated Floquet-Bloch waves. *Phys. Rev. A.*, 1986, **33**(5): 3232~3242
- [6] P. St. J. Russell, Optics of Floquet-Bloch waves in dielectric grating. *Appl. Phys. B*, 1986, **39**(4): 231~246
- [7] R. Zengerle, Light propagation in singly and doubly periodic planar waveguides. *J. Mod. Opt.*, 1987, **34**(12): 1589~1617
- [8] E. Yablonovitch, Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(20): 2059~2062
- [9] S. John, Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(23): 2486~2489
- [10] S. John, R. Rangarajan, Optimal structures for classical wave localization: An alternative to the Ioffe-Regel criterion. *Phys. Rev. B*, 1988, **38**(14): 10101~10104
- [11] E. N. Economou, A. Zedetsis, Classical wave propagation in periodic structures. *Phys. Rev. B*, 1989, **40**(2): 1334~1337
- [12] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, Photonic band structure: The face-centered-cubic case. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, **63**(18): 1950~1953
- [13] S. Satpathy, Z. Zhang, M. R. Salehpour, Theory of photon bands in three-dimensional periodic dielectric structures. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(11): 1239~1242
- [14] Z. Zhang, S. Satpathy, Electromagnetic wave propagation in periodic structures: Bloch wave solution of Maxwell's equations. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(21): 2650~2653
- [15] K. M. Leung, Y. F. Liu, Photon band structure: The plane-wave method. *Phys. Rev. B*, 1990, **41**(14): 10188~10190
- [16] K. M. Leung, Y. F. Liu, Full vector calculation of photonic band structures in face-centered-cubic dielectric media. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(21): 2646~2649
- [17] P. St. J. Russell, Photonic band gaps. *Phys. World*, 1992, **5**(8): 37~42
- [18] P. St. J. Russell, Bloch wave analysis of dispersion and pulse propagation in pure distributed feedback structures. *J. Mod. Opt.*, 1991, **38**(8): 1599~1619

Wavevector Diagrams of Floquet-Bloch Waves in Periodic Dielectric Structures

Ma Chunsheng

(National Integrated Optoelectronics Laboratory, Department of Electronic Engineering,
Jilin University, Changchun 130023)

(Received 5 July 1993)

Abstract The dispersion phenomena of the Floquet-Bloch waves in periodic dielectric structures are analysed and summarized in terms of the wavevector diagrams. It is shown that the formation and variation of the stop-bands in wavevector diagrams are strongly dependent on the light wavelength and the structural parameters. With the increase of the periodic length or with the decrease of the light wavelength, the wavevector diagrams become more complicated, and more stop-bands would appear.

Key words Periodic dielectric structure, Floquet-Bloch wave, dispersion, wavevector diagram, stop-band.