

# 高斯光束在梯度折射率纤维中的传播 ——振幅与光斑分布的解析解族\*

廖廷佛

(福建师范大学激光研究所, 福州 350007)

**摘 要** 从近轴波动方程出发, 导出在梯度折射率纤维中传播的高斯光束振幅与光斑分布的解析解族. 从这一结果可得到高斯光束在抛物型、锥形、类锥形梯度折射率纤维中传播的一系列特解.

**关键词** 梯度折射率, 光波导, 自聚焦纤维, 高斯光束传播.

## 1 引 言

随着梯度折射率透镜在激光光盘系统、激光照排装置、光通信系统、传真机、复印机及内窥镜等微型激光光电子系统中应用的迅速发展<sup>[1~3]</sup>, 研究光在梯度折射率纤维(波导)中的传输理论<sup>[4]</sup>, 对开拓新型的梯度折射率光波导及微小光学器件的应用具有重要的理论和实际意义. 近年来文献<sup>[5~8]</sup>基于波动光学理论研究了高斯光束在梯度折射率纤维中的传播特性. 然而迄今得到的只是在抛物型、锥形、类锥形等几种特定梯度折射率纤维中传播的光波场特解. 本文提出近轴波动方程的一般解, 导出该试探解成为近轴波动方程解析解的必要条件. 从而首次给出了在非圆柱形梯度折射率中传播的高斯光束振幅和光斑分布的解析解族.

## 2 近轴波动方程及其试探解

在弱非匀条件下, 光在梯度折射率纤维中的传播遵循标量波动方程

$$\nabla^2 \psi + n^2(x, y, z)k^2 \psi = 0 \quad (1)$$

$$n^2(x, y, z) = n_0^2(z)[1 - g^2(z)(x^2 + y^2)] \quad (2)$$

式中  $k = 2\pi/\lambda$  为光波在真空中的波数.  $n(x, y, z)$  为纤维的折射率分布,  $n_0(z) = n(0, 0, z)$  为纤维轴上折射率分布,  $g(z)$  为纤维轴向折射率梯度参数. 设方程(1)的解为

$$\psi(r, z) = A(r, z) \left[ \frac{k(\theta)}{k(z)} \right]^{1/2} \exp[-i \int k(z) dz] \quad (3)$$

式中  $k(z) = n_0(z)k$ ,  $k(0) = n_0k$ . 取柱坐标系, 并设  $\psi$  具有对称性. 在 WKB 近似条件  $|\partial^2 A / \partial z^2| \ll |k(z) \partial A / \partial z|$  下. 将(3)式代入(1)式并忽略与  $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{2}{k(z)} \frac{dk}{dz} \right]$  及  $\left[ \frac{2}{k(z)} \frac{dk(z)}{dz} \right]^2$  有关的项.

\* 福建省自然科学基金资助课题.

收稿日期: 1992年12月4日; 收到修改稿日期: 1993年6月18日

得到如下近轴波动方程<sup>[4]</sup>.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \left[ 2ik(z) + \frac{1}{k(z)} \frac{dk(z)}{dz} \right] \frac{\partial A}{\partial z} - k^2(z)g^2(z)r^2A = 0 \quad (4)$$

设方程(4)的试探解为

$$A(r, z) = \frac{E_0}{f(z)} \exp \left[ -ik \frac{r^2}{R(z)} - \frac{r^2}{\omega_0^2 f^2(z)} - ik\phi_0(z) \right] \quad (5)$$

式中  $E_0$  为初始振幅;  $R(z)$  为波面曲率半径

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{1}{f(z)} \frac{df(z)}{dz}, \quad (6)$$

$f(z)$  为描述光斑半径的无量纲函数, 满足方程

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \frac{1}{k(z)} \frac{dk(z)}{dz} + g^2(z)f(z) = \frac{4}{k^2 \omega_0^4 f^3(z)} \quad (7)$$

对于  $n_0(z)$  为常数的梯度折射率纤维,  $\frac{dk(z)}{dz} = 0$ , (7)式化为

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + g^2(z) f(z) = \frac{1}{Z_0^2 f^3(z)} \quad (8)$$

式中  $Z_0 = \pi \omega_0^2 / \lambda$  为高斯光束瑞利距离. 这样, 对  $g(z)$ 、 $k(z)$  给定的折射率分布, 由二阶微分方程(7)式或(8)式求解光斑半径  $f(z)$ , 再由(5)、(6)式推知高斯光束在梯度折射率纤维中的传播规律. 考虑  $n_0(z)$  为常数的情形, 可以证明, 当  $g(z)$  满足条件

$$g(z) - \frac{3}{2} g^2(z) + 2 \left( \frac{b^2}{g_0^2 L^2} - 1 \right) g^4(z) = 0 \quad (9)$$

时, 方程(8)的解析解为

$$f^2(z) = \frac{g_0}{g(z)} \left[ \frac{1}{2b^2} (b^2 + \Lambda^2 + \alpha^2) + \frac{1}{2b^2} (b^2 - \Lambda^2 - \alpha^2) \cos(2b - \zeta) + \frac{\partial}{\partial b} \sin(2b\zeta) \right] \quad (10)$$

式中  $L$  为描述  $g(z)$  变化规律的特性常数.  $b$  为一与  $g_0$ 、 $L$  有关的常数,  $\Lambda \equiv L/Z_0$ ,  $\alpha = (L/R) + Lg(0)/2g_0$ ,  $R = R(0)$ ,  $\zeta$  为

$$\zeta \equiv \zeta(z) = \frac{1}{g_0 L} \int_0^z g(z) dz \quad (11)$$

由此可知, 在  $g(z)$  由(9)式确定的梯度折射率纤维中传播的高斯光束光斑分布可由(10)式描述; 而振幅分布则由解析解(5)式描述.

### 3 高斯光束光斑分布解析解族

从  $g(z)$  所满足的(9)式确定  $g(z)$  (或折射率分布), 可以证明

$$g(z) = g_0 / \left[ p \left( \frac{z}{L} \right)^2 + q \left( \frac{z}{L} \right) + 1 \right] \quad (12)$$

是方程(9)的一个解析解族. 显然,  $g(z)$  满足初始条件  $g(0) = g_0$ . 将(12)式代入(9)式求得

$$q^2 = 4(p - a), \quad a = b^2 - g_0^2 L^2. \quad (13)$$

对给定的梯度折射率纤维,  $a$ ,  $p$  为常数, 由(13)式确定常数  $q$ , 则参数  $g(z)$  及折射率分布也随之确定. 取不同的  $p$ ,  $q$  值构成了一个折射率分布族. 从而(10)式也代表高斯光束光斑分布的一个解析解族, 当  $p$  取不同值时, 为得到  $g(z)$  为实函数应使  $q^2 \geq 0$ , 由(13)式得  $b$  的允许取

值

$$b^2 \leq g_0^2 L^2 + p \quad (14)$$

由(2)式和(12)式并计及  $n_0(z)$  为常数可知, 高斯光束光斑分布由(10)式描述的梯度折射率纤维, 其等折射率面一般为旋转抛物面族, 当  $p=0$  时等折射率面为二次旋转圆锥面. 把折射率分布由(2)、(12)式确定的梯度折射率纤维称为非圆柱形梯度折射率纤维.

为进一步求出光斑分布的解析解族  $f(z)$ , 还需计算积分(11)式, 即

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \int_0^{z/L} [p(\frac{z}{L})^2 + q(\frac{z}{L}) + 1]^{-1} d(\frac{z}{L}) \\ \text{或 } \zeta &= \int_0^{z/L} [p(\frac{z}{L} + \frac{q}{2p})^2 + \frac{a}{p}] d(\frac{z}{L}) \quad (p \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

下面给出若干情形的积分结果

1) 当  $p=0$  时, 即锥形梯度折射率纤维.

$$\zeta = \frac{1}{q} \ln(1 + q \frac{z}{L}) \quad (q \neq 0) \quad (16)$$

2) 当  $p \neq 0$  时, 为保证  $g(z) > 0$ , 应使  $a$  与  $p$  同号, 则有

$$\zeta = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{p}{\sqrt{a}} (\frac{z}{L} + \frac{q}{2p}) \right] \Big|_0^z & (a > 0, p > 0) \\ \frac{1}{2\sqrt{-a}} \ln \frac{1 - \frac{p}{\sqrt{-a}} (\frac{z}{L} + \frac{q}{2p})}{1 + \frac{p}{\sqrt{-a}} (\frac{z}{L} + \frac{q}{2p})} \Big|_0^z & (a < 0, p < 0) \\ -\frac{1}{p} (\frac{z}{L} + \frac{q}{2p})^{-1} \Big|_0^z & (a = 0, p \neq 0) \end{cases} \quad (17)$$

3)  $q = \pm 2p$  时, (17)式化为

$$\zeta = \begin{cases} \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{p}{\sqrt{a}} (1 \pm \frac{z}{L}) \Big|_0^z & (a > 0, p > 0) \\ \pm \frac{1}{2\sqrt{-a}} \ln \frac{1 + \frac{p}{\sqrt{-a}} (1 \mp \frac{z}{L})}{1 - \frac{p}{\sqrt{-a}} (1 \mp \frac{z}{L})} \Big|_0^z & (a < 0, p < 0) \\ \mp \frac{1}{p} (1 \pm \frac{z}{L})^{-1} \Big|_0^z & (a = 0, p \neq 0) \end{cases} \quad (18)$$

由(12)式可求得  $g(0) = -gq/2$ , 从而  $\alpha = (L/R) - (q/2)$ . 利用上述结果及(10)式即得在非圆形梯度折射率纤维中传播的高斯光束光斑分布的解析解族. 当  $p, q$  取特定值时, 可得几种典型的梯度折射率纤维有关结果.

3.1 抛物型梯度折射率纤维<sup>[5]</sup>,  $p = \pm 1, q = 0$

$$g^\pm(z) = g_0 / [1 \pm \frac{z^2}{L^2}], \quad b^2 = g_0^2 L^2 \pm 1, \quad (19)$$

$$f^2(z) = (1 \pm \frac{z^2}{L^2}) \{ \frac{1}{2b^2} [b^2 + A^2 + (\frac{L}{R})^2] + \frac{1}{2b^2} [b^2 - A^2 - (\frac{L}{R})^2] \cos(2b\zeta^\pm) + \frac{1}{b} \frac{L}{R} \sin(2b\zeta^\pm) \} \quad (20)$$

其中  $\zeta^+ = \text{tg}^{-1}(\frac{z}{L})$  对  $g^+(z)$ ,  $\zeta^- = \frac{1}{2} \ln [\frac{L-z}{L+z}]$  对  $g^-(z)$ .

3.2 锥形梯度折射率纤维<sup>[6,7]</sup>,  $p = 0, q = \pm 1$ ,

$$g^\pm(z) = g_0 / (1 \pm \frac{z}{L}), \quad b^2 = g_0^2 L^2 - \frac{1}{4} \quad (21)$$

$$f^2(z) = (1 \pm \frac{z}{L}) \{ \frac{1}{2b^2} [b^2 + A^2 + (\frac{L}{R} \mp \frac{1}{2})^2] + \frac{1}{2b^2} [b^2 - A^2 - (\frac{L}{R} \mp \frac{1}{2})^2] \cos [2b \ln(1 \pm \frac{z}{L}) \pm \frac{1}{b} (\frac{L}{R} \mp \frac{1}{2}) \sin [2b \ln(1 \pm \frac{z}{L})]] \} \quad (22)$$

3.3 类锥形梯度折射率纤维<sup>[8]</sup>,  $p = 1/2, q = \pm 1$ ,

$$g^\pm(z) = g_0 / [1 \pm \frac{z}{L} + \frac{1}{2} (\frac{z}{L})^2], \quad b^2 = g_0^2 L^2 + \frac{1}{4}, \quad (23)$$

$$f^2(z) = [1 \pm \frac{z}{L} + \frac{1}{2} (\frac{z}{L})^2] \{ \frac{1}{2b^2} [b^2 + A^2 + (\frac{L}{R} \mp \frac{1}{2})^2] + \frac{1}{2b^2} [b^2 - A^2 - (\frac{L}{R} \mp \frac{1}{2})^2] \cos(2b\zeta^\pm) + \frac{1}{b} (\frac{L}{R} \mp \frac{1}{2}) \sin(2b\zeta^\pm) \} \quad (24)$$

其中  $\zeta^\pm = \pm 2 [\text{tg}^{-1}(1 \pm \frac{z}{L}) - \frac{\pi}{4}]$ .

3.4 类锥形梯度折射率纤维<sup>[9]</sup>,  $p = -1/2, q = \pm 1$ ,

$$g^\pm(z) = g_0 / [1 \pm \frac{z}{L} - \frac{1}{2} (\frac{z}{L})^2], \quad b^2 = g_0^2 L^2 - \frac{3}{4}, \quad (25)$$

$$f^2(z) = [1 \pm \frac{z}{L} - \frac{1}{2} (\frac{z}{L})^2] \{ \frac{1}{2b^2} [b^2 + A^2 + (\frac{L}{R} \mp \frac{1}{2})^2] + \frac{1}{2b^2} [b^2 - A^2 - (\frac{L}{R} \mp \frac{1}{2})^2] \cos(2b\zeta^\pm) + \frac{1}{b} (\frac{L}{R} \mp \frac{1}{2}) \sin(2b\zeta^\pm) \} \quad (26)$$

$$\text{式中 } \zeta^\pm = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \ln \frac{\sqrt{3} - (1 \mp \frac{z}{L})}{\sqrt{3} + (1 \mp \frac{z}{L})} - \ln \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \right].$$

## 4 讨论与结论

考虑高斯平面波入射情况, 令  $R \rightarrow \infty, \alpha = q/2$  (10)式化为

$$f^2(z) = [1 + q(\frac{z}{L}) + p(\frac{z}{L})^2] \{ \frac{1}{2b^2} [b^2 + A^2 + \frac{1}{4}q^2] + \frac{1}{2b^2} [b^2 - A^2 - \frac{1}{4}q^2] \cos(2b\zeta) - \frac{q}{2b} \sin(2b\zeta) \} \quad (27)$$

在(10)式或(27)式中  $A$  是个描述波动光学传播衍射效应的参数. 当  $A$  变化时, 高斯光束在非圆柱形梯度折射率纤维中传播特性也随之变化.  $A$  越小, 波动光学效应就越不明显. 当  $A^2$  与  $b^2$  相比足够小 [ $A \leq (b/25)$ ] 或  $A \rightarrow 0$  时, 这时可以用几何光线描述高斯光束的传播<sup>[4]</sup>.

从(27)式及  $[df^2(z)]/dz = 0$  条件, 用数值法可算出光斑极大值或极小值(节点)坐标  $z_m$ ,

如表 1 所列 1.

Table 1 The coordinate  $z_m$  for beam spot extreme values

( $g_0 = 0.50$ ,  $L = 15$ ,  $\omega_0 = 50 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ )

GRINiber	m							
	1	2	3	4	5	6	7	8
parabolic	3.125	5.895	8.415	10.229	11.768	12.734	13.521	13.980
conical	2.954	5.142	7.084	8.522	9.798	10.743	11.581	12.202
taper-loke A	2.962	5.283	7.432	9.274	11.035	12.662	14.258	15.830
taper-like B	2.945	5.013	6.773	7.915	8.865	9.455	9.940	10.234

综上所述, 从近轴波动方程出发, 得到了在非圆柱形梯度折射率纤维中传播的高斯光束光斑与振幅分布的一个解析解族. 并由此得到高斯光束在抛物型、锥形、类锥形梯度折射率纤维中传播的一系列特解. 即文献[5~9]系为本文的若干特例. 本文研究结果为梯度折射率光波导的制作及梯度折射率微小器件的设计上应用提供了理论依据.

### 参 考 文 献

- [1] E. W. Marchand, H. Nishihara, Gradient-index optics; introduction by the feature editors. *Appl. Opt.* 1990, **29** (28) : 3991
- [2] I. Kitano, Current status of aplanatic gradient-index lens system. *Appl. Opt.* 1990, **29**(28) : 3992~3997
- [3] M. Agu, A. Akiba, T. Mochizuki *et al.*, Multimatched filtering using a microlens array for an optical-neural pattern recognition system. *Appl. Opt.* 1990, **29**(28) : 4087~4091
- [4] M. S. Sodha, A. K. Ghatak, Inhomogeneous optical waveguides. Plenum Press, New York, London, 1977, Chapter 5
- [5] 廖廷弟, 黄衍堂, 光在抛物型梯度折射率介质中传播特性的波动光学分析. *量子电子学*, 1992, **9**(3) : 288~294
- [6] 殷宗敏, 姚圩, 锥形 GRZN 透镜的光束宽度和变周期节点. *光子学报*, 1992, **21**(3) : 254~260
- [7] 廖廷弟, 锥形梯度折射率激光准直系统的矩阵光学研究. *光学学报*, 1993, **13**(4) : 351~355
- [8] 廖廷弟, 激光束经类锥形梯度折射率纤维的传播理论及其应用. *光通信技术*, 1992, **16**(3) : 198~202
- [9] 廖廷弟, 光在类锥形梯度折射率纤维中的传播——波动光学分析. *光子学报*, 1993, **22**(3) : 256~263

## Gaussian Beam Propagation Through Gradient Index Fibers —— A Group of Analytical Solutions for Beam Amplitude and Beam Spot Radius

Liao Tingdi

(*Institute of Lasers, Fujian Normal University, Fuzhou 350007*)

(Received 4 December 1992; revised 18 June 1993)

**Abstract** Based on the paraxial wave equation, a group of analytical solutions for amplitude and spot radius of the Gaussian beam propagation through tapered gradient-index fibers are derived. From which a series of specific solutions for Gaussian beam propagation in parabolic, conical and taper-like gradient index fibers are obtained in this paper.

**Key words** gradient-index, optical waveguide, selfoc fiber, Gaussian beam.