第14卷 第4期 光学学报 Vol. 14, No. 4
1994年4月 ACTA OPTICA SINICA April, 1994

光在非线性介质中的度规表述*

郭 弘 朱莳通
(中国科学院上海光学精密机械研究所，上海 201800)

摘 要 应用光学度规模型并利用Cartan结构方程和测地线方程，半定量地研究了光在非线性介质中的运动情况并与过去的结果进行了比较.

关键词 光学度规

1 引 言

光在非线性介质中传播的问题已被广泛地研究，其中诸如自聚焦、自散焦、自陷等问题已在理论与实验中做了大量的研究[1]. 本文在此基础上，引进光学度规模型，并结合Cartan结构方程和测地线方程，研究了光子在非线性介质中的传播问题，导出了光的自聚焦、衍射及自陷等情况，同时得出了光在介质中螺旋式行进的情形并对各种情况进行了详细的讨论. 本文采用国际单位制，度规符号(−,+,+,+)，四维坐标为(ct, x, y, z).

2 理论模型及推导

根据文献[2]，本文讨论的问题中光学度规为[3]

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)u_\mu u_\nu, \tag{1}$$

具体取值为

$$\bar{g}_{00} = -\frac{1}{n^2}, \qquad \bar{g}_{11} = \bar{g}_{22} = \bar{g}_{33} = 1. \tag{2}$$

引入柱坐标后，$\bar{g}_{\mu\nu}$变为

$$\bar{g}_{00} = -\frac{1}{n^2}, \quad g_{rr} = 1 \quad g_{\phi\phi} = r^2, \quad g_{zz} = 1. \tag{3}$$

从而

$$d\tau^2 = -\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (c^2/n^2)dt^2 - dr^2 - r^2d\phi^2 - dz^2 \tag{4}$$

引入活动标架$\{e^a\}$，有

$$d\tau^2 = (e^0)^2 - (e^1)^2 - (e^2)^2 - (e^3)^2. \tag{5}$$

其中

---

* 国家自然科学基金资助的课题
收稿日期：1992年11月9日

$$e^0 = \frac{c}{n}dt, \quad e^1 = dr, \quad e^2 = rd\phi, \quad e^3 = dz. \tag{6}$$

令 $n = n(t, r, \phi, z)$，于是

$$\left.\begin{aligned}
de^0 &= d\left(\frac{c}{n}dt\right) = \frac{1}{n}\left(n_r e^0 \wedge e^1 + \frac{n_\phi}{r}e^0 \wedge e^2 + n_z e^0 \wedge e^3\right), \\
de^1 &= d(dr) = 0, \\
de^2 &= d(rd\phi) = \frac{1}{r}e^1 \wedge e^2, \\
de^3 &= d(dz) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

由 Cartan 结构方程[4]

$$de^a + \omega^a_{\cdot b} \wedge e^b = 0, \quad d\omega^a_{\cdot b} + \omega^a_{\cdot c} \wedge \omega^c_{\cdot b} = -\frac{1}{2}R^a_{\cdot b} \tag{8}$$

并结合(7)式，可得

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^0_{\cdot 1} \wedge e^1 + \omega^0_2 \wedge e^2 + \omega^0_3 \wedge e^3 = -\frac{1}{n}\left(n_r e^0 \wedge e^1 + \frac{n_\phi}{r}e^0 \wedge e^2 + n_z e^0 \wedge e^3\right), \\
&\omega^1_0 \wedge e^0 + \omega^1_2 \wedge e^2 + \omega^1_3 \wedge e^3 = 0, \\
&\omega^2_0 \wedge e^0 + \omega^2_1 \wedge e^1 + \omega^2_3 \wedge e^3 = -\frac{1}{r}e^1 \wedge e^2, \\
&\omega^3_0 \wedge e^0 + \omega^3_1 \wedge e^1 + \omega^3_2 \wedge e^2 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

注意到 $\omega^i_j = -\omega^j_i\,(i,j \neq 0)$ 及 $\omega^0_i = \omega^i_0\,(i \neq 0)$，可由(9)式算得

$$\left.\begin{aligned}
\omega^0_{\cdot 1} &= \omega^1_0 = -\frac{n_r}{n}e^0 = -\frac{n_r c}{n^2}dt, \\
\omega^0_2 &= \omega^2_0 = -\frac{n_\phi}{n}\frac{1}{r}e^0 = -\frac{n_\phi c}{n^2 r}dt, \\
\omega^0_3 &= \omega^3_0 = -\frac{n_z}{n}e^0 = -\frac{n_z c}{n^2}dt, \\
\omega^1_2 &= -\frac{1}{r}e^2 = -d\phi, \\
\omega^2_1 &= \frac{1}{r}e^2 = d\phi, \\
\omega^1_3 &= \omega^3_1 = \omega^2_3 = \omega^3_2 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

2.1　由(8)式、(10)式可以算出曲率 R^a_{bcd}

$$R^0_{102} = \frac{n_\phi}{nr^2}, \quad R^0_{202} = -\frac{n_r}{nr}, \quad R^a_{bcd} = 0. \quad \text{（其它）} \tag{11}$$

其中用到了 $R^a_{\cdot b} = R^a_{bcd}e^c \wedge e^d$ 并通过系数比较算得了曲率 R^a_{bcd}. 式中 n_t, n_r, n_ϕ, n_z 分别代表 n 对各坐标的偏导数，即 $\partial n/\partial t$, $\partial n/\partial r$, $\partial n/\partial \phi$, $\partial n/\partial z$. 若假定 $n = n_0 + n_2|E|^2$，其中 n_0 是线性折射率，E 为光场场强，并设光场为高斯光，即

$$E = A_0^2 e^{-r^2}, \tag{12}$$

则

$$n_t = n_\phi = n_z = 0, \quad n_r = -2n_2 A_0^2 r\exp(-r^2). \tag{13}$$

代入曲率公式(11)中可得

$$R^{0}_{202}=\frac{2n_2A_0^2}{n}\exp(-r^2),\qquad R^{a}_{bcd}=0\ (\text{其它}) \tag{14}$$

若 1) $n_2>0$，则 $R^0_{202}>0$，表征弯曲时空为黎曼型的正曲率形式，这时光线会向轴向偏转，呈聚焦趋势，直至 $r\to 0$ 时为曲率的最大值，即形成焦点.

2) $n_2<0$，则 $R^0_{202}<0$，表征弯曲时空为罗巴切夫斯基的负曲率形式，此时光线会背向轴向偏转，呈衍射趋势，直至 $r\to\infty$ 时，曲率为 0 是最小值，即不再会继续发散. $r\to 0$ 时，曲率为负的最大值(即绝对值最大，符号为负)，此时弯曲是最严重，是散射最严重的情形.

3) n_2 的符号如果可变，则聚焦与衍射将会相互制约，时而聚焦、时而衍射.

4) $n_2=0$，则曲率为 0 为平直时空，此时光线将无任何偏转会以直线形式行进下去，这正是光在线性介质中传播的情形[2]. 当 $n_2\approx 0$ 有挠动时，则会出现不稳定的自陷状态，n_2 的微弱变化都将导致衍射或聚焦的发生.

2.2 运动轨迹

测地线方程的活动标架形式为

$$de^a+\omega^a_b e^b=0 \tag{15}$$

将(10)式，(6)式代入(15)式并化简，可得

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{cn_t}{n^2}dt^2+\frac{c}{n}d^2t-\frac{c}{n^2}\{n_\phi dtd\phi+n_rdtdr+n_zdtdz\}=0\\
&d^2r-\frac{n_rc^2}{n^3}dt^2-rd\phi^2=0,\\
&rd^2\phi-\frac{n_\phi c^2}{n^2r}dt^2+2drd\phi=0,\\
&d^2z-\frac{n_zc^2}{n^3}dt^2=0.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

这就是本文用以得出运动轨迹方程的基础. 以 dp^2(p 为任意参数)去除(16)式，整理得

$$\left.\begin{aligned}
&n_t\left(\frac{dt}{dp}\right)^2-n\frac{d^2t}{dp^2}+\left\{n_\phi\frac{dt}{dp}\frac{d\phi}{dp}+n_r\frac{dt}{dp}\frac{dr}{dp}+n_z\frac{dt}{dp}\frac{dz}{dp}=0,\right.\\
&n_r\left(\frac{dt}{dp}\right)^2+\frac{n^3}{c^2}r\left(\frac{d\phi}{dp}\right)^2-\frac{n^3}{c^2}\frac{d^2r}{dp^2}=0,\\
&n_\phi\left(\frac{dt}{dp}\right)^2-\frac{n^3}{c^2}r^2\frac{d^2\phi}{dp^2}-2\frac{n^3}{c^2}r\frac{dr}{dp}\frac{d\phi}{dp}=0,\\
&n_z\left(\frac{dt}{dp}\right)^2-\frac{n^3}{c^2}\frac{d^2z}{dp^2}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

下面只讨论 $n_t=n_\phi=n_z=0$，$n_r\neq 0$ 的情况，此时(17)式变为

$$n\frac{d^2t}{dp^2}-n_r\frac{dt}{dp}\frac{d\phi}{dp}=0. \tag{18}$$

$$n_r\left(\frac{dt}{dp}\right)^2+\frac{n^3}{c^2}r\left(\frac{d\phi}{dp}\right)^2-\frac{n^3}{c^2}\frac{d^2r}{dp^2}=0, \tag{19}$$

$$r^2\frac{d^2\phi}{dp^2}+2r\frac{dr}{dp}\frac{d\phi}{dp}=0, \tag{20}$$

$$\frac{d^2 z}{d p^2} = 0. \tag{21}$$

(18)式变形后可以导出 $n\ln\left(\frac{dt}{dp}\right) - n_r r =$ 常数 C_0，由于 p 的任意性，可令 $C_0 = 0$，于是

$$dt = dp \exp\left(n_r r / n\right) \tag{22}$$

(20)式可以导出

$$r^2 \frac{d\phi}{dp} = J' \text{（常数）} \tag{23}$$

(21)式可以导出

$$\frac{dz}{dp} = C_z \text{（常数）} \tag{24}$$

将(19)、(22)、(23)、(24)式联立，可得

$$r^2 \frac{d\phi}{dz} = J \text{（常数）} \tag{25}$$

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{J^2}{r^3} + \frac{n_r c_z^2}{n^3 C_z^2} \exp\left(2n_r r/n\right) \tag{26}$$

(25)、(26)式便描划出了光在介质中行进的轨迹. 其中由于 (r, ϕ, z) 相互独立(互相不显含)，于是(25)式可得出

$$r^2 \phi = Jz. \tag{27}$$

(积分常数定为 0，即设 $\phi_0 = 0$，$z_0 = 0$)，这是螺旋线方程，J 的正负将决定曲线的螺旋方向是向上或是向下，亦即光线将是螺旋式地行进，这与过去的结果略有不同[1]. 考察(26) 式，并假定 n_r 取(13)式之值，可得

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{J^2}{r^3} - \frac{2A_0^2 c^2}{n^3 C_z^2}\{n_2 r \exp\left(-r^2\right) \exp[-4n_2 r^2 A_0^2/n \exp\left(-r^2\right)]\}. \tag{28}$$

当 $r \to \infty$ 时，$\frac{d^2 r}{dz^2} \to 0$，同时可证明，$\frac{d^{(n)} r}{dz^n} \to 0$ $(n \geqslant 2)$，于是此时光线的行进轨迹几乎不变，即聚焦与衍射平衡，这与前面对曲率的分析一致. 而当 r 较小时，$\frac{d^2 r}{dz^2} \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$，即此时有较强烈的弯曲效应，而是聚焦或是衍射则依赖于 n_2 之值以定出 $\frac{dr}{dz}$ 的情况，当 $\frac{dr}{dz} = 0$ 时的解使 $\frac{d^2 r}{dz^2} > 0$，则是聚焦，反之为衍射，若使 $\frac{d^2 r}{dz^2} = 0$，则为自陷态.

3 结 语

利用光学度规模型对光线在非线性介质中传输问题的研究，较为成功地解释了自聚焦、衍射及自陷现象，并导出了光线螺旋行进的结果，这个结果的正确与否将有待于更精细实验的验证. 需要指出的是，假设中的光场是用高斯光，其中假定光斑为单位长度，从而 $\exp\left(-r^2\right)$ 为无量纲量(即 $r^2/1$ 为无量纲)；另外由于光子是假设为单经典粒子情形，因此应利用统计的方式才能得到更精确的结论，这些都将在今后继续研究.

感谢赵东升和叶海的有益的讨论

参 考 文 献

[1] 沈元壤著，顾世杰译， 非线性光学原理，上册，北京，科学出版社，1987，327～330

[2] 郭 弘，朱莳通，邓锡铭， 光在线性介质中的度规描述. 中国激光，1993，**A20**(11)：845～848

[3] W. Gordon， Zur Lichtfortpflanzung nach der relativitätstheorie. *Annalen Der Physik*.，1923，**72**(22)：421～456

[4] S. Chandrasekhar， The mathematical theory of black holes，Oxford，Clarendon Press，New York，Oxford University Press，1983，22～23

Metric Description of Light in Nonlinear Media①

Guo Hong Zhu Shitong

(*Shanghai Institute of Optics & Fine Mechanics*，*Academia Sinica*，*Shanghai* 201800)

(Received 9 November 1992)

Abstract This paper studied the motion of light in nonlinear media quasiquantitively based on the optical metric model and Cartan equation. And the comparison with the traditional results are presented.

Key words optical metric

附录 此结果是近似 $d\omega_\xi = 0$ 得出的，精确推导结果是($d\omega_\xi \neq 0$)：

$$R^0_{101} = \frac{2n_r^2}{n^2} - \frac{n_{rr}}{n}, \quad R^0_{102} = R^0_{201} = \frac{2n_r n_\phi}{n^2 r} + \frac{n_\phi}{nr^2} - \frac{n_{r\phi}}{nr},$$

$$R^0_{103} = R^0_{301} = \frac{2n_r n_z}{n^2} - \frac{n_{rr}}{n}, \quad R^0_{202} = \frac{2n_\phi^2}{n^2 r^2} - \frac{n_{\phi\phi}}{nr^2} - \frac{n_r}{nr},$$

$$R^0_{203} = R^0_{302} = \frac{2n_z n_\phi}{n^2 r} - \frac{n_{\phi z}}{nr}, \quad R^0_{303} = \frac{2n_z^2}{n^2} - \frac{n_{zz}}{n}.$$

当假定 $n_t = n_\phi - n_z = 0$ 时，有

$$R^0_{101} = \frac{8n_2^2 A_0^4 r^2 \exp(-r^2)}{n^2} + \frac{2n_2 A_0^2 (1 - 2r^2) \exp(-r^2)}{n}, \quad R^0_{202} = \frac{2n_2 A_0^2 \exp(-r^2)}{n}$$

可以得出与近似情形一致的讨论结果.

---

① Supported by National Natural Science Foundation.