

# 湍流大气中图像传输的信息量

张逸新

(无锡轻工业学院机械系, 无锡 214036)

**摘 要** 分别从系统像的信息量和信息自由度的角度分析了大气湍流对相干和不相干照明光学系统成像质量和分辨率的影响. 理论上, 处于一定大气湍流条件下的相干照明系统存在着超出经典衍射极限的超分辨率.

**关键词** 大气湍流, 成像质量, 超分辨率.

## 1 引 言

大气湍流是降低大气图像传输系统性能限制系统成像分辨率的主要因素之一, 所以湍流对传输图像质量的影响是天文和大气通讯工作者十分关心的问题, 为此已从各个角度分析了该问题, 如从调制传递函数和信噪比的角度研究了大气湍流对系统成像质量的影响<sup>[1]</sup>, 用维纳滤波技术<sup>[2]</sup>、双频谱分析法<sup>[3]</sup>研究了因大气湍流畸变图像的恢复等.

为了更客观、全面地了解大气湍流对成像系统成像质量的影响, 本文从有多少物方信息传到像方的角度即用反映系统成像特性的系统光学信息量  $N = N_{\text{dof}} \log_2(1 + \text{SNR})$  评价传像系统成像质量的优劣, 其中  $N_{\text{dof}}$  是信息自由度,  $\text{SNR}$  是系统的信噪比, 得到了同时包含大气湍流效应和光学系统参量效应的湍流大气中相干与非相干照明传像系统的信息量并从理论上得到了处于湍流大气中的相干照明成像系统也存在着超分辨率的结论.

## 2 系统的信息自由度

现考虑一个分布在孔径为  $R_1$  内的相干有限物体通过弱湍流大气传输后被一个与所处圆形光瞳孔径半径相同为  $R_2$ 、焦距为  $f$  的理想薄透镜成像. 设物场分布为

$$O(\rho) = u_0 \exp \left[ - \left( \frac{1}{2R_1^2} + \frac{jk}{2F} \right) \rho^2 \right], \quad (1)$$

其中  $F$  为波前曲率半径,  $k$  为光波波数,  $u_0$  为  $\rho = 0$  处的物场振幅, 设大气传像系统所成的瞬间像为<sup>[4]</sup>

$$i(\rho_2) = \int_{R_1} d\rho_1 O(\rho_1) S_i(\rho_2, \rho_1), \quad (2)$$

$$S_i(\rho_2, \rho_1) = \lambda^{-2} \int_{R_2} d\rho' \exp \{ \chi(\rho', \rho_1) + j [S(\rho_1', \rho_1) + k\rho' \cdot (\rho_2 - \rho_1)/L] \}, \quad (3)$$

这里  $S_l(\rho_2, \rho_1)$  是传像系统的点扩展函数,  $\chi(\rho', \rho_1)$  和  $S(\rho', \rho_1)$  分别是大气湍流引入的对数振幅和相位起伏,  $L$  是图像传播的距离. (3) 式表明传像系统的点扩展函数是移动变化的即系统成像是非等晕的. 考虑到光学信息量是加性的<sup>[5]</sup>, 故在下面的分析中首先把像斑按相干长展  $\rho_0 = [1.46 k^2 \int_0^L d\xi C_n^2(\xi)(1 - \xi/L)^{5/3}]^{-3/5}$  与湍流外尺度  $L_0$  中较小者分解为  $J = 4\pi a_t^2/(\pi d^2)$  个等晕斑, 分析某一个等晕斑的光学信息量  $N_i$ , 然后通过  $J$  个等晕斑信息量求和获得图像的总光学信息量  $N = \sum_{i=1}^J N_i$ ; 上面  $C_n$  是湍流结构常数,  $d$  是等晕斑直径,  $a_t$  是图像的等效半径. 在等晕斑内大气干扰为<sup>[4]</sup>

$$\chi(\rho', \rho_1) + j S(\rho', \rho_1) \approx \chi(\rho', 0) + j S(\rho', 0), \quad \rho_1 \in R_1, \quad \rho' \in R_2. \quad (4)$$

现在系统的点扩展函数是线性平移不变的.

$$S_l(\rho_2 - \rho_1) = \lambda^{-2} \int_{R_2} d\rho' \exp \{ \chi(\rho', 0) + j [ S(\rho', 0) + k \rho' \cdot (\rho_2 - \rho_1) / L ] \}. \quad (5)$$

进一步考虑到在弱湍流起伏区, 光场的对数振幅起伏量  $\chi \ll 1$ <sup>[6]</sup>, 则可把  $\exp [\chi(\rho', 0)]$  近似展开为  $\exp [\chi(\rho', 0)] \approx 1 + \chi(\rho', 0)$ . 由上述分析像场简化为

$$\begin{aligned} i(\rho_2) &= \int_{R_1} d\rho_1 O(\rho_1) S_l(\rho_2 - \rho_1) = i_s(\rho_2) + i_n(\rho_2) \\ &= \int_{R_1} d\rho_1 O(\rho_1) S_1(\rho_2 - \rho_1) + \int_{R_1} d\rho_1 O(\rho_1) S_2(\rho_2 - \rho_1), \end{aligned} \quad (6)$$

其中: 
$$S_1(\rho_2 - \rho_1) = \lambda^{-2} \int_{R_2} \exp \{ j [ S(\rho', 0) + k \rho' \cdot (\rho_2 - \rho_1) / L ] \} d\rho'. \quad (7)$$

$$S_2(\rho_2 - \rho_1) = \lambda^{-2} \int_{R_2} \chi(\rho', 0) \exp \{ j [ S(\rho', 0) + k \rho' \cdot (\rho_2 - \rho_1) / L ] \} d\rho'. \quad (8)$$

由于(6)式中  $i_s(\rho_2)$  在无湍流存在时因  $S(\rho', 0) = 0$  复原为物场  $O(\rho)$  的衍射限制像, 所以称  $i_s(\rho)$  为“图像信号”, 而  $i_n(\rho_2)$  在无湍流存在时因  $\chi(\rho', 0) = 0$  而为零, 所以称  $i_n(\rho_2)$  为大气湍流引入的“噪声场”.

现在分析  $i_s$  和  $i_n$  对光学信息自由度的贡献. 对于“图像信号” $i_s$ , 其点扩展函数  $S_1(\rho_2 - \rho_1)$  的傅里叶变换式为

$$\tilde{S}_1(\omega) = \exp j S(\omega) \text{Circ} \left[ \frac{\lambda |\omega|}{2\pi R_2} \right], \quad (9)$$

由于圆椭球波函数在有限积分区域内是完备正交函数, 用其展开物场为:

$$O(\rho_1) = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{M,n} \phi_{M,n}(\rho/R_1) e^{jM\theta}, \quad (10)$$

其中  $\phi_{M,n}(\rho/R_1)$  是圆椭球波函数, 其在区域  $0 \leq \rho \leq R_1$  内是完备的,  $\theta$  是极角,  $\phi_{M,n}(\rho/R_1)$  满足归一化法则<sup>[7]</sup>,

$$\int_0^{R_1} d\rho \rho \phi_{M,n}(\rho/R_1) \phi_{m,n}(\rho/R_1) = \lambda_{M,n} \delta_{M,m}. \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} d\rho \rho \phi_{M,n}(\rho/R_1) \phi_{m,n}(\rho/R_1) = \delta_{M,m}, \quad (12)$$

$\lambda_{M,n}$  是本征函数  $\phi_{M,n}(\rho/R_1)$  的本征值, 其满足  $0 < \lambda_{M,n} \leq 1$ ,  $\lambda_{M,n} > \lambda_{M,n+1}$ ,  $\lambda_{M,n} > \lambda_{M+1,n}$  的一列实正数, 一旦  $N > N_{\text{crit}}$ ,  $n > n_{\text{crit}}$ ,  $\lambda_{M,n}$  迅速趋于零, (10)式中的系数可由下式决定:

$$a_{M,n} = \frac{1}{2\pi\lambda_{M,n}} \int_0^{R_1} \rho d\rho \int_0^{2\pi} O(\rho, \theta) \phi_{M,n}(\rho/R_1) e^{-jM\theta} d\theta. \quad (13)$$

由圆椭圆波函数的贝塞尔-傅里叶变换<sup>[7]</sup>

$$\int_0^{R_1} d\rho \rho J_M(\omega, \rho) \phi_{M,n}(\rho/R_1) = (-1)^M \lambda_{M,n}^{1/2} \phi_{M,n}(\omega/\Omega), \quad \omega \geq 0 \quad (14)$$

$$\int_0^{\Omega} d\omega \omega J_M(\omega, \rho) \phi_{M,n}(\omega/\Omega) = (-1)^M \lambda_{M,n}^{1/2} \phi_{M,n}(\rho/R_1), \quad (15)$$

其中  $\Omega$  是空间截止频率. (10)式为

$$\tilde{O}(\omega) = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{M,n} j^M \lambda_{M,n}^{1/2} \phi_{M,n}(\omega/\Omega) \exp(-j\psi M),$$

其中  $\psi$  是频率空间角度参量. 像的傅里叶变换则为

$$\tilde{i}_s(\omega) = \exp(jS(\omega)) \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{M,n} j^M \lambda_{M,n}^{1/2} \phi_{M,n}(\omega/\Omega) \exp(-jM\psi), \quad (16)$$

对(16)式作逆傅里叶变换有

$$i_s(\rho) = S_1(\rho) * \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{M,n} \lambda_{M,n} \phi_{M,n}(\rho/R_1) \exp(jM\theta), \quad (17)$$

交换求和与卷积运算“\*”顺序即得到用正交归一函数  $G_{M,n}$  展开的像场分布

$$i_s(\rho) = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{M,n} \lambda_{M,n} G_{M,n}(\rho/R_1) \quad (18)$$

$$\text{式中} \quad G_{M,n}(\tau) = S_1(\tau) * \phi_{M,n}(\tau) \exp(jM\theta) \quad (19)$$

设大气成像系统的成像核函数为

$$K(\omega, \zeta) = \exp\{j[S(\omega) - S(\zeta)]\} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Sigma} \exp\{-j(\omega - \zeta) \cdot \mathbf{x}\} d\mathbf{x}, \quad (20)$$

其中  $\Sigma$  是平面面积. 易证每一个在  $(-\Omega, \Omega)$  内的带限函数  $G_{M,n}(\rho/R_1)$  是在  $\rho$  平面内的正交完备系<sup>[8]</sup>, 且其傅里叶变换  $\tilde{G}_{M,n}(\omega)$  是下列积分方程的本征函数

$$\iint_{0}^{\Omega} K(\omega, \zeta) \tilde{G}_{M,n}(\zeta) \zeta d\zeta d\psi = \lambda_{M,n} \tilde{G}_{M,n}(\omega), \quad (21)$$

在(21)式中代入(20)式和  $\tilde{G}_{M,n}(\omega)$ , 有

$$\int_0^{R_1} \rho d\rho J_M(\rho\omega) \phi_{M,n}(\rho/R_1) = (-1)^M \lambda_{M,n}^{1/2} \phi_{M,n}(\omega/\Omega). \quad (22)$$

(22)式正是不存在大气湍流时该系统成像的本征方程<sup>[9]</sup>, 所以单个等晕斑的自由度  $N_u$  为<sup>[9]</sup>

$$N_u = (R_1\Omega/\pi)^2 = (kR_1d/2\pi f)^2. \quad (23)$$

由相干照明成像系统的本征值  $\lambda_{M,n}$  的阶跃特性<sup>[9]</sup>, 噪声  $i_n$  即大气湍流不影响相干照明系统等晕斑像元的自由度<sup>[8,9]</sup>, 所以考虑  $i_n$  后系统的自由度仍为  $N_u$ .

又因为在一般图像传输情况下常用平面波照明待传输图像的, 而且  $N_{dof}$  的变化对  $N$  的影响远大于  $SNR$  变化的影响, 故可以把  $SNR$  近似看作常量, 那么系统的总自由度  $N_{dof} = JN_u$ .

当检测孔径  $R_2 < a_t$ ,  $2R_2 < L_0$  时, 像面像斑内含有的等晕斑数  $J = 4\pi R_2^2/\pi d^2$ , 系统的总自由度数为

$$N_{dof} = JN_u = (kR_1R_2/\pi f)^2, \quad (24)$$

对平面波而言  $a_t^2 = R_1^2 + L^2/k^2R_1^2 + \{2L[1 - 0.37(\rho_0/D_0)^{5/3}]/k\rho_0\}^2$ ,  $L^2/k^2R_1^2$  反映了衍射扩展,  $\{2L[1 - 0.37(\rho_0/D_0)^{5/3}]/k\rho_0\}^2$  反映的是湍流扩展,  $D_0 = 2R_1$ . 若检测孔径  $R_2 > a_t$  且  $L_0 > 2a_t$ , 系统的总自由度数为

$$N_{dof} = JN_u = (kR_1a_t/\pi f)^2 \quad (25)$$

考虑不相干平面波物场  $O(\rho)$  通过湍流大气成像, 现在物像关系满足<sup>[16]</sup>

$$\langle I(\rho) \rangle = O(\rho) * \langle S(\rho) \rangle, \quad (26)$$

其傅里叶变换关系为

$$\langle \bar{I}(\omega) \rangle = \langle \bar{S}_0(\omega) \rangle \bar{O}(\omega), \quad (27)$$

这里  $\langle \dots \rangle$  表示系统统计平均, 对长期曝光成像而言, (27) 式为:

$$\langle \bar{I}(\omega) \rangle_{LE} = \exp[-3.44(\lambda_m f \omega / 2\pi r_0)^{5/3}] \bar{S}_0(\omega) \bar{O}(\omega), \quad (28)$$

这里  $\lambda_m$  是平均波长,  $f$  是接收系统的焦距,  $r_0 = 2.1\rho_0$ ,  $\bar{S}_0(\omega)$  是不存在湍流时系统的传递函数. 至于短期曝光成像的  $\langle I(\omega) \rangle_{SE}$  则为

$$\langle \bar{I}(\omega) \rangle_{SE} = \exp\{-3.44(\lambda_m f \omega / 2\pi r_0)^{5/3}\} [1 - (\lambda_m f \omega / 2\pi D_0)^{5/3}] \bar{S}_0(\omega) \bar{O}(\omega). \quad (29)$$

由于不相干照明系统的自由度与相干照明系统的自由度量级相同<sup>[9]</sup>, 所以仍以  $N_{dof} = (R_1\Omega/\pi)^2$  近似量度系统的自由度, 由(28)式可得长期曝光成像像的近似截止频率

$$\Omega = 0.722 \times 2\pi r_0 / \lambda_m f$$

对应的系统的自由度为

$$N_{dof} = (1.44r_0R_1/\lambda_m f)_{LE}^2, \quad (30)$$

对于短期曝光成像而言 ( $2R_2 > r_0$ ),  $\Omega$  由下式决定

$$1.72(\lambda_m f \omega / 2\pi r_0)^2 (r_0/D_0)^{5/3} - [1.72(\lambda_m f \omega / 2\pi r_0)^{5/3} - 1] = 0,$$

显然  $(r_0/D_0)$  不同,  $\Omega$  也不同, 记  $\Omega$  为  $\Omega = \alpha\pi r_0/\lambda_m f$ . 这里  $\alpha$  是  $(r_0/D_0)$  的函数, 系统的自由度为

$$N_{dof} = (\alpha R_1 r_0 / \lambda_m f)_{SE}^2, \quad (31)$$

当  $D_0 = 3.8r_0$  时,  $\alpha = 2.80$ ;  $D_0 = 5r_0$  时,  $\alpha = 2.66$ . 在  $r_0 > D_0$  时, 截止频率由  $\bar{S}(\omega)$  决定,  $\Omega = 2\pi D_0/\lambda_m f$ ,  $N_{dof} = (2R_1 D_0/\lambda_m f)^2$ .

### 3 系统的信息量和讨论

大气传像系统的信噪比可表示为<sup>[1]</sup>

$$SNR = \frac{e^2 \alpha^2 \langle P \rangle^2}{e^2 \alpha^2 \sigma_i^2 + (e^2/T) [(\alpha \langle P \rangle + \alpha \sigma_i^2)(1 + \alpha \sigma_i^2 T)] + N_0/T}, \quad (32)$$

式中  $e$  为电子的电荷,  $\alpha = \eta/h\nu$ ,  $\eta$  为检测仪器的量子效率,  $h$  为普朗克常数,  $\nu$  为光波频率,

$\langle P \rangle$  为入射波信号平均功率,  $\sigma_p^2 = \langle (P - \langle P \rangle)^2 \rangle$  为像面图像信号功率起伏方差,  $T$  为曝光时间,  $\sigma_s^2$  为背景功率,  $N_0$  为白噪声谱密度. 在实际成像系统中总可以采取尽量降低背景噪声, 散粒噪声, 所以在大多数实际成像系统中影响系统成像信噪比的主导噪声是湍流噪声, 在忽略其它噪声干扰的情况下, 像斑的信噪比为

$$SNR = \langle P \rangle^2 / \sigma_p^2(\rho) = m_r^2(\rho). \quad (33)$$

显然, 一般情况下像面图像的信噪比是位置  $\rho$  的函数. 然而如前所述平面波照明图像传输条件下因为  $N_{\omega f}$  的变化与  $SNR$  的变化对  $N$  影响不同, 设  $m_r^2(\rho) \approx m_r^2(0) \simeq 4\sigma_x^2 = 1.24 C_x^2 k^3 L^{11/6} (\sigma_x^2 < 0.25)$ . 由此得到相干照明系统像的信息量为

$$N = \begin{cases} (kR_1 R_2 / \pi f)^2 \log_2(1 + 0.25 \sigma_x^2) & R_2 < a_t \\ (kR_1 a_t / \pi f)^2 \log_2(1 + 0.25 \sigma_x^2) & R_2 > a_t, \end{cases} \quad (34)$$

不相干照明系统像的信息量为

$$N = \begin{cases} (1.44 r_0 R_1 / \lambda_m f)_{LE}^2 \log_2(1 + 0.25 \sigma_x^2) \\ (\alpha r_0 R_1 / \lambda_m f)_{SE}^2 \log_2(1 + 0.25 \sigma_x^2). \end{cases} \quad (35)$$

本文分析表明大气湍流在  $R_2 < a_t$  条件下不仅不降低相干照明系统的分辨率即自由度<sup>[9]</sup>, 而且在一定条件  $R_2 > a_t$  的条件下反而因光斑的湍流扩展而使系统的分辨率高于经典衍射极限分辨率即理论上存在着超分辨率. 该结论的物理意义是: 由于像斑的扩展(相当于检测孔径增大了), 像斑内包含了比经典衍射受限像斑更多的描述物场细节的高频空间频率信号, 已有人在实验上观察到此结论<sup>[11]</sup>, 故为降低大气湍流效应改善大气使像系统成像分辨率指出了潜在可能性. 然而由于 Fried 参量  $r_0$  随  $C_x^2$  或  $L$  增加而减少, 故在  $r_0 < D_0$  的湍流起伏区内大气湍流严重限制了不相干照明系统的分辨率. 但是不论相干与否, 由于  $SNR$  是湍流起伏的减函数, 系统所传图像的像质都随湍流起伏增加而降低. 图 1 给出了相干照明图像的信息量和自由度随湍流强度  $C_x^2$  变化的规律计算模拟曲线.

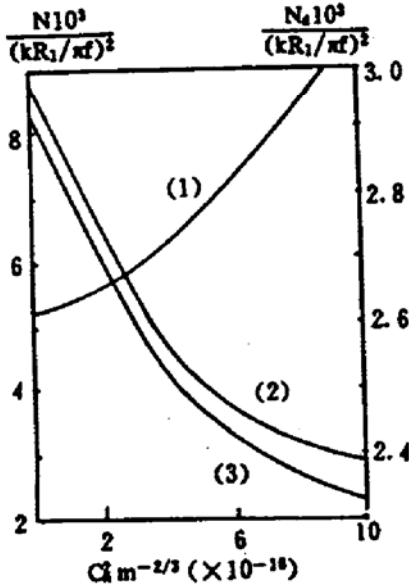


Fig. 1 Relation of information content and degree-of-freedom vs  $C_x^2$  for a imaging system,  $L = 5$  km,  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ ,  $R_1 = 0.05$  m, (1)  $a_t = \{R_1^2 + \frac{L^2}{(kR_1)^2} + [2L(1 - 0.37(\rho_0/D_0)^{1/2})^2]\}^{1/2}$  ( $R_2 > a_t$ ); (2)  $a_t = R_1$  ( $R_2 < a_t$ ); (3)  $N_{\omega f}$  vs  $C_x^2$  for  $R_2 > a_t$

## 参 考 文 献

- [1] S. J. Wang, M. A. Plonus, Imaging through turbulence; Degradation of signal-to-noise ratio. *Opt. Commun.*, 1984, 50(2): 73~78
- [2] X. Shi, R. K. Ward, Restoration of images degraded by atmospheric turbulence and detection noise. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1992, 9(3): 364~370
- [3] T. W. Lawrence, J. P. Fitch, D. M. Goodman et al., Extended-image reconstruction through horizontal path turbulence using bispectral speckle interferometry. *Opt. Engng.*, 1992, 31(3): 627~636
- [4] J. H. Shapiro, (J. W. Strohbehn ed.), *Laser Beam Propagation in the Atmosphere*. First edition, New York, Springer-Verlag, 1978, 185~193
- [5] 威廉男, 秦克诚, 程 路, 统计光学导论. 第一版, 天津, 南开大学出版社, 1987, 635~711
- [6] S. F. Clifford, (J. W. Strohbehn ed.), *Laser Beam Propagation in the Atmosphere*. First edition, New York,

- Springer-Verlag, 1978, 30~31
- [7] B. Roy. Frieden, (E. Wolf ed.), *Progress in Optics*. First edition, North-Holland, Amsterdam, 1971, 311~407
- [8] P. D. Santis, C. Palma, Degrees of freedom of aberrated images under the illumination of coherent light. *Opt. Acta*, 1976, **23**(9) : 743~752
- [9] G. T. di Francia, Degrees of freedom of an image. *J. Opt. Soc. Am.*, 1969, **59**(7) : 799~804
- [10] M. C. Poggemann, Limited degree-of-freedom adaptive optics and image reconstruction. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(29) : 4227~4236
- [11] M. I. Charnotskii, V. A. Myakinin, V. U. Zavorotnyy, Observation of superresolution in nonisoplanatic imaging through turbulence. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1990, **7**(8) : 1345~1350

## Information Content for Images Propagating through Atmospheric Turbulence

Zhang Yixin

(Department of Mechanics, Wuxi Institute of Light Industry, Wuxi 214036)

(Received 3 February 1993; revised 5 July 1993)

**Abstract** The effect of atmospheric turbulence on the imaging quality and resolution of an optical system, illuminated by the coherent and noncoherent light, are discussed by using the information capacity and information degrees of freedom of an image imaged by the system. In the special case of the atmospheric turbulence for a coherent illumination system, there is a potential of the superresolution beyond the classical diffraction-limit.

**Key words** atmospheric turbulence, imaging quality, superresolution.