

减少自变量与 ALOPEX 算法 在二元光学元件设计中的应用

易治明 赵达尊

(北京理工大学工程光学系, 北京 100081)

提 要 建立了在二元光学元件优化设计中独立自变量数目与入出射图案之间的数学关系, 指出了以往将元件所有单元位相作为自变量直接进行优化的不当所在, 为减少设计中计算量与得到好的设计结果提供了一条有效途径; 另外, 成功地将一种比模拟退火算法计算量小的优化算法——ALOPEX 应用到二元光学元件的设计中来, 结合这两方面, 提出了一种计算量小, 且抗局部极值能力强的通用二元光学元件设计方案, 最后比较了多种算法的设计结果.

关键词 二元光学, 辐射聚焦器, 逆衍射.

1 引 言

二元光学作为一个新的光学领域, 越来越受到人们的重视. 以往在这一领域的研究着重于提出或引用新的算法, 以减少优化过程中的计算量, 如误差递减[ER]算法^[1], 最速下降法^[2], 输入-输出法^[3]等; 或保证算法最终能求得问题的全局最优解, 如模拟退火法(SA)^[4]. 本文沿续这一思路, 将一种与模拟退火法相比具有更好抗局部极值性能, 且计算量小的优化算法—ALOPEX^[5] 应用到二元光学设计中来; 此外, 为更有效地减少设计过程中的计算量, 确立了在二元光学元件设计中独立自变量数目与入、出射图案之间的数学关系; 最后结合这两个方面, 提出了一套性能稳定, 计算量小, 且抗局部极值能力强的二元光学元件通用设计方案; 并通过一个具体的辐射聚焦器设计实例, 对多种算法进行了比较.

2 二元光学元件设计中独立自变量数目

二元光学元件的设计, 用离散傅里叶变换关系表示, 实质上就是如下一类问题.

已知入、出射光强度分布为 $|a(m, n)|^2$, $|AIM(k, l)|^2$, $k, l, m, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$; 求位相 $\phi(m, n)$ 和 / 或 $\psi(k, l)$, 使如下评价函数 F 最小.

$$F = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left| \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} |a(m, n) \exp [j\phi(m, n)] \exp [-j(2\pi/N)(mk + nl)]| - |AIM(k, l)| \right| \quad (1)$$

这是一个具有庞大自变量数 (N^2 个) 的非线性优化问题. 最理想的结果是得到一组 $\phi(m, n)$ 和 /

或 $\psi(k, l)$, 使如下严格的傅里叶变换关系得以满足, 此时(1)式的 F 等于零.

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} |a(m, n)| \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} (mk + nl) \right] \exp [j\phi(m, n)] = |AIM(k, l)| \exp [j\phi(k, l)] \quad (2)$$

如果改以(2)式左边的 $\exp [i\phi(m, n)]$ 为自变量, 则(2)式为一个包含了 N^2 个等式的线性方程组. 假设在出射图案光强分布中有 q_f 个单元的 $|AIM(k, l)|$ 等于零, 根据线性方程组性质, 可消去方程组中的 q_f 个自变量, 而仅把剩下的 $N^2 - q_f$ 个自变量作为独立自变量来求解.

对于这一类问题, 由于求元件各单元位相与求出射图案各单元位相是等价的, 如果以出射图案光波位相为自变量, 对于出射图案中的零值单元, 无论该单元位相如何取值, 通过傅里叶变换, 都不会对元件各单元位相和振幅产生任何影响, 因此从频域来阐明上述有关独立自变量的思想更为清楚.

对于一个 $N \times N$ 的二元光学元件设计过程中作为独立自变量数目为 $N^2 - \max(q_0, q_f)$, 其中 q_0 为元件入射图案中零值单元的数目, q_f 为要求的输出图案中光强为零的单元个数.

利用这一关系式, 假定所设计的二元光学元件的位相量化等级为 D , 则优化空间可从 D^{N^2} 减小到 $D^{N^2 - \max(q_0, q_f)}$. 由于在设计所提出的强度分布图案中通常含有大量的零值单元, 优化计算量将显著地减少.

由此可以看出, 在二元光学元件的设计过程中, 将元件面上所有单元位相都作为独立自变量进行优化的做法是不恰当的, 因为这样很难保证那些非独立自变量取值所必须满足的关系, 只有误差递减算法, 最速下降法、输入-输出法等通过正反傅里叶变换对而构成了封闭设计回路的算法才能自动满足多变量的取值规则. 不保证这一前提的实现, 即使采用了那些抗局部极值能力较强的优化算法, 也很难在较短的时间内使多变量取值碰巧满足取值规则而得到问题的全局最优解.

此外还应看到, 尽管误差递减等算法自动地遵守了自变量的取值规则, 但由于除去 $\max(q_0, q_f)$ 个非独立自变量, 问题仍然是一个拥有 $N^2 - \max(q_0, q_f)$ 个独立自变量的优化问题. 由于误差递减等算法在优化过程中只接受使评价函数变好的自变量取值, 因而极易陷入某一局部极值; 以不同的初始假设解开始计算往往会得到不同的最终解.

因此, 对于二元光学元件设计, 关键就在于寻找一种计算量小, 同时还具备较强抗局部极值能力的优化方案.

3 ALOPEX 算法

目前, 模拟退火已被成功地应用到二元光学元件的设计中^[6,7,8], 并表现出较好的抗局部极值性能. 但由于其在一次迭代中仅改变一个自变量取值, 然后就重新计算评价函数, 以权衡是否接受这次尝试, 此过程对优化问题的每一变量逐一进行, 所以, 对于空间带宽积较大的二元光学元件设计, 计算量很大. 为了解决这一问题, 采用了一种从模拟退火发展而来的新算法-ALOPEX, 该算法在一次迭代中改变所有自变量取值, 然后再计算评价函数值, 每一变量的改变量由上两次迭代中评价函数和自变量的改变决定, 用算式表达如下:

$$\phi^i(m, n) = \phi^{i-1}(m, n) + \delta^i(m, n) \quad (3)$$

$$\delta^i(m, n) = \begin{cases} \delta & \text{probability } P^i(m, n) \\ -\delta & \text{Probability } 1 - P^i(m, n) \end{cases} \quad (4)$$

$$P^i(m, n) = \frac{1}{1 + \exp [\Delta^i(m, n)/T]} \quad (5)$$

$$\Delta^i(m, n) = [\phi^{i-1}(m, n) - \phi^{i-2}(m, n)](F^{i-1} - F^{i-2}) \quad (6)$$

$$T = \frac{1}{QN^2} \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} |\Delta^i(m, n)| \quad (7)$$

式中 $\phi(m, n)$ 为元件单元 (m, n) 的位相值; i 为迭代序号; δ 为自变量增量步长; T 为温度; Q 为每完成 Q 次迭代后就改变一次系统的温度值, 通常取 10, 20 等整数; F 为评价函数, 见(1)式. 本算法的目的就是寻找使 F 最小的 $\phi(m, n)$ 取值.

将这一算法应用于二元光学元件设计, 结合对独立自变量数目的分析, 提出如下优化方案: 任选元件的 $N^2 - \max(q_0, q_f)$ 个单元的位相作为独立自变量, 由 ALOPEX 控制, 而余下的即为非独立自变量由误差递减算法控制, 用程序流程图表示如下:

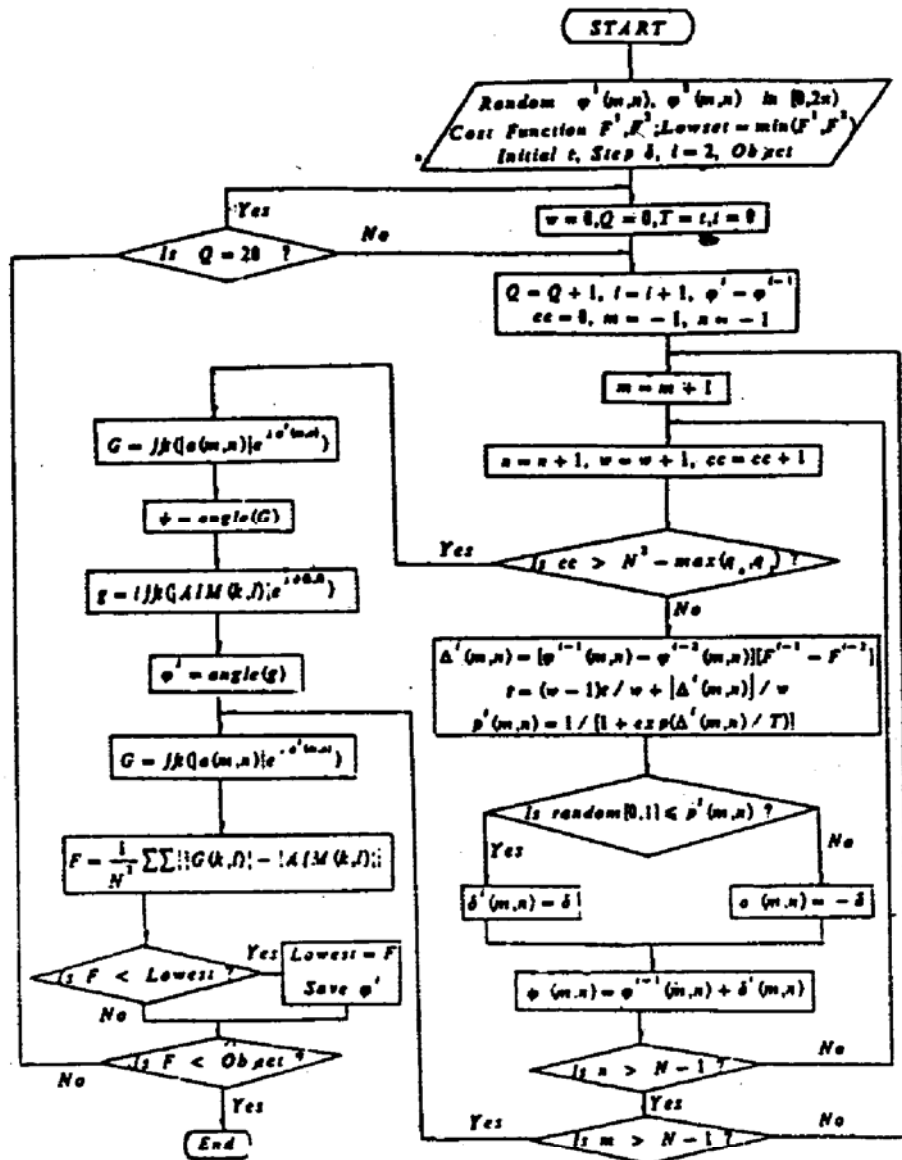


Fig. 1 Flow chart of the optimization scheme

在上述流程图中, Object 是结束优化算法所需的评价函数目标值; cc 用来统计独立自变量数目; w 是为了按(7)式求温度值而设置的一个中间变量; Lowest 为目前最低评价函数值, 其它参数意义与文中相同.

4 设计结果比较与结论

以一个 32×32 的辐射聚焦器的设计为例,该元件将具有如图 2(a)所示高斯强度分布的激光束转换为具有如图 2(b)所示的一问号形强度分布的激光束.取元件位相量化等级为 8,以下采用四种方案:1) 误差递减法;2) 不分独立与非独立自变量直接利用 ALOPEX;3) 利用模拟退火法控制独立自变量,而用误差递减法控制非独立自变量;4) 利用 ALOPEX 控制独立自变量,而用误差递减法控制非独立自变量,从同一随机初始位相值开始设计,初始评价函数为 $F^0 = 0.4012$,在带 Intel 80387 数学协处理器的 Super 386DX/33 微机上,各方案分别得到如图 3(a),(b),(c)和(d)所示结果,所用时间为 8,17,15,10 hr,对应的评价函数 F 为 0.1675,0.1628,0.1562,0.1387.

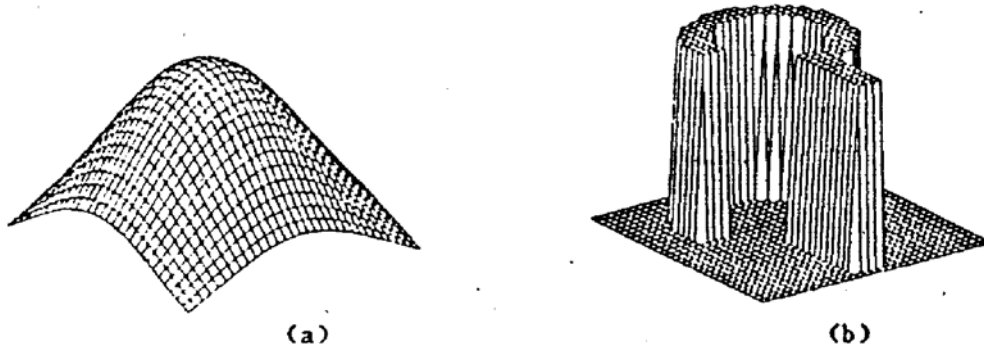


Fig. 2 The intensity distribution

(a) input picture--Gaussian beam; (b) output picture

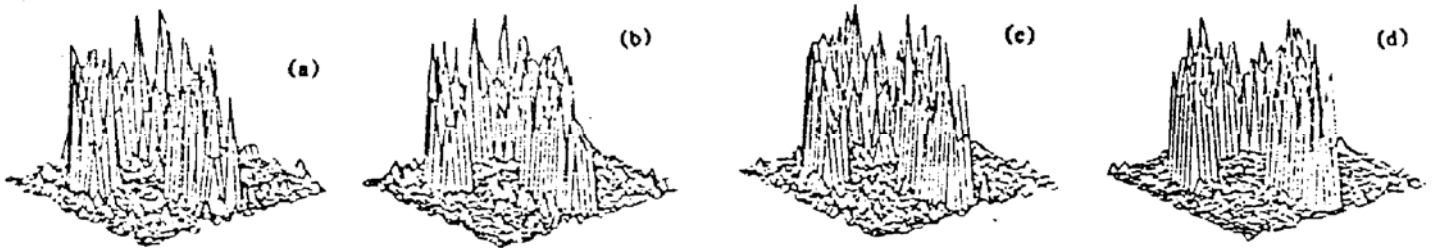


Fig. 3 Results of the computer simulated intensity distribution

(a) with ER, $F = 0.1675$; (b) with ALOPEX, $F = 0.1628$; (c) control the independent variables with SA, and the others with ER, $F = 0.1562$; (d) control the independent variables with ALOPEX and the others with ER, $F = 0.1387$

由于在程序中对光强进行了归一化,从(1)式可以看出 F 值的意义为:观察面上衍射图案与目标图案之间的差异总和,与仅有 $1024 \times F$ 全像素的亮暗与目标图案正好相反相当.另外,本文还以 5 组不同的随机初始位相值采用方案 1) 进行了设计,其表现都是开始迭代 F 值下降很快,随着迭代次数的增加,下降速度逐步降低,运行大约 8~10 hr,得到 5 个最低的 F 值分别为:0.1698, 0.1687, 0.1705, 0.1675, 0.1683,以后即使无限时地将程序运行下去, F 值都几乎不再下降,或者说改善极小,这与文献[3]中所述表现相同,反映了误差递减法的特性.与其它三种方案相比,误差递减法尽管计算量小,但在抗局部极值性能上则是最差的,通常都陷入问题的某一局部极值域而发生死循环;方案 3)与方案 4)结果比较,说明 ALOPEX 的计算量较模拟退火法的小;在此前提下再比较方案 2)与方案 3),则显示了区别对待不同类型自变量对减少计算量的有效性,这点由方案 2)与方案 4)比较更为明显;方案 1)与方案 4)比较,方案

4)能够在与方案 1)大致相同的时间里得到更好的结果,这说明方案 4)不仅具备了方案 1)的优点,并且由于 ALOPEX 针对独立自变量的引入,使本方案剔除了误差递减法易陷入局部极值的不足.众所周知,ALOPEX 与模拟退火法一样,具有了使算法在全部优化空间内总以某一大于 $\frac{1}{2}$ 的概率趋向问题的全局最优解的特性,这点结合(4),(5),(6)三式可以看出.

上述结果证明:在二元光学元件的设计过程中,根据入、出射图案确定独立自变量数目对于减少计算量与得到好的设计结果具有实际意义;采用 ALOPEX 控制独立自变量、而用误差递减法控制非独立自变量的优化方案是一种同时具备了计算量小、且抗局部极值能力强的二元光学元件通用设计方案,有利于在较短时间内得到问题的全局最优解.

参 考 文 献

- [1] J. R. Fienup, C. C. Wackerman, Phase-retrieval stagnation problems and solutions. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1986, 3(11): 1897~1907
- [2] J. R. Fienup, Iterative method applied to image reconstruction and to computer-generated holograms. *Opt. Engng.*, 1980, 19(3): 297~305
- [3] J. R. Fienup, Phase retrieval algorithms; a comparison. *Appl. Opt.*, 1982, 21(15): 2758~2769
- [4] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, Jr., M. P. Vecchi, Optimization by simulated annealing. *Science*, 1983, 220(4598): 671~680
- [5] E. Harth, T. Kalogeropoulos, A. S. Pandya, A universal optimization network. *The Special Symposium Volume of the 10th Annual International Conference of the IEEE-EMBS*, New Orleans, LA, Nov. 1988
- [6] G. C. Baister, T. J. Hall, CGH's designed using a simulated annealing procedure on the complex zeros of the far field pattern. Bellingham, Washington, USA, *Proc. SPIE*, 1990, 1281: 176~190
- [7] M. Nieto-Vesperinas, R. Navarro, Performance of a simulated-annealing algorithm for phase retrieval. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1988, 5(1): 30~38
- [8] Myung Soo Kim, Michael R. Feldman, Clark C. Guest, Optimum encoding of binary phase-only filters with a simulated annealing algorithm. *Opt. Lett.*, 1989, 14(11): 545~547

A Study on Binary Optical Element Design

Yi Zhiming Zhao Dazun

(Department of Optical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

(Received 11 January 1993; revised 22 March 1993)

Abstract In order to lighten the heavy calculation in the optimal design of binary optical elements, the relation-shap between the number of the independent variables in the optimization and the intensity distributions of the input and/or output pictures is set up mathematically. A general optimization algorithm the ALOPEX is introduced to this area. By taking these together, a general scheme for the optimal design of binary optical elements, which needs shorter computing time and has a strong-ability of resistance to the local extrema is proposed. Some design results by using defferent algorithms are compared.

Key words binary optics, radiation focusator, inverse diffraction.