

染料激光色立方模型的第一 通过时间分布*

梅冬成

曹力 吴大进

(华中理工大学激光技术国家实验室, (华中理工大学激光技术国家实验室和物理系,
武汉 430074) 武汉 430074)

摘 要 本文首先把 Jung 和 Hanggi 提出的统一色噪声近似推广到多维情形,从而导出了这一近似下单模染料激光色立方模型的朗之万方程和福克-普朗克方程;得到了该模型第一通过时间分布的平均值,协方差和偏斜率的近似解析式并将其和数值模拟进行比较.

关键词 第一通过时间分布, 色泵噪声, 统一色噪声近似.

1 引 言

对单模染料激光输出的实验研究和理论分析^[1~4]指出,为了正确描述染料激光的统计性质,必须引用包含色泵噪声的激光模型,即描述激光复场幅的随机动力学方程除含有通常量子噪声(白噪声)驱动项外,还必须包含色噪声驱动项.由于色噪声驱动的系统非马尔柯夫性质,只能用近似方法导出系统的福克-普朗克方程.最近,作者用最佳福克-普朗克方程近似^[5]计算了染料激光色增益和色损失模型第一通过时间分布的平均值,协方差和偏斜率^[6,7].但该近似方法仅对泵噪声的关联时间 τ 小的情况适用.本文将 Jung 等人的统一色噪声近似^[8,9]加以推广,用来研究第一通过时间分布问题.该近似的特点是,对 $\tau \rightarrow 0$ 及 $\tau \rightarrow \infty$ 是精确的,对 τ 的其它值是近似的.但文献[8,9]的理论局限于一维系统,不能直接用于激光问题.

本文首先将该近似推广到多维系统.然后用多维统一色噪声近似推导色立方模型的朗之万方程及相应的福克-普朗克方程,进而计算色立方模型第一通过时间分布的平均值(即平均第一通过时间),协方差和偏斜率,最后是若干结论.

2 统一色噪声近似的推广

为了处理激光问题,把统一色噪声近似推广到多维系统.考虑多维的朗之万方程

$$\dot{X}(t) = h(X) + \underline{g}(X) \in(t) + Q^{1/2} \underline{g}_2(x) \Gamma(t) \quad (1)$$

符号“ \sim ”表示矩阵, $\in(t)$ 为高斯色噪声, $\Gamma(t)$ 为高斯白噪声,已知其统计性质如下:

$$\langle \in(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad (2)$$

收稿日期:1992年11月16日;收到修改稿日期:1993年3月3日

*国家自然科学基金资助课题.

$$\langle \epsilon_i(t) \epsilon_j(t') \rangle = \delta_{ij}(D/\tau) \exp[-(1/\tau)|t-t'|], \quad \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = 2\delta_{ij}\delta(t-t') \quad (3)$$

(1)~(3)式随机等价于方程组

$$\dot{X}(t) = h(X) + \underline{g}(X) \epsilon(t) + Q^{1/2} \underline{g}_2(X) \Gamma(t) \quad (4)$$

$$\dot{\epsilon}(t) = -\epsilon(t)/\tau + D^{1/2} \eta(t)/\tau, \quad (5)$$

式中 $\eta(t)$ 为高斯白噪声. 作变量变换

$$y(X) = \int_{\underline{g}(X')}^{-1} dX', \quad \underline{G}[y(X)] = \underline{g}(X)^{-1} \underline{g}_2(X), \quad H[y(X)] = \underline{g}(X)^{-1} h(X) \quad (6)$$

令 $v = H + \epsilon(t)$ 并利用(5)式, 可得

$$\dot{y} = v(y) + Q^{1/2} \underline{G}(y) \Gamma(t) \quad (7)$$

$$\dot{v} = [H'(y) - \frac{1}{\tau} I] v + \frac{1}{\tau} H(y) + \frac{D^{1/2}}{\tau} \eta(t) + Q^{1/2} \underline{G}(y) H'(y) \Gamma(t) \quad (8)$$

其中 I 为单位矩阵, $H'(y)$ 表示 H 对 y 求导数. 令

$$\underline{\gamma}^{-1} = [I - \tau H'(y)]^{-1} \quad (9)$$

绝热消去(7)式中的变量 v , 并用原来变量表示即得

$$\dot{X}(t) = \underline{g}(x) \underline{\gamma}(x)^{-1} \underline{g}(x)^{-1} h(x) + D^{1/2} \underline{g}(x) \underline{\gamma}(x)^{-1} \eta(t) + Q^{1/2} \underline{g}(x) \underline{\gamma}(x)^{-1} \underline{g}(x)^{-1} \underline{g}_2(x) \Gamma(t) \quad (10)$$

上式为高斯白噪声 $\eta(t)$ 和 $\Gamma(t)$ 驱动的马尔柯夫过程

3 统一色噪声近似下色立方模型的朗之万方程和福克-普朗克方程

单模染料激光色立方模型为

$$\dot{E} = a_0 E - A|E|^2 E + p(t)E + q(t) \quad (11)$$

式中 E 为激光复场幅, a_0 为净增益, A 为自饱和系数, $p(t) = p_1(t) + ip_2(t)$ 为色泵噪声, 其性质

$$\langle p_i(t) \rangle = 0, \quad \langle p_i(t) p_j(t') \rangle = \delta_{ij}(P'/\tau) \exp[-(1/\tau)(t-t')], \quad (i, j = 1, 2). \quad (12)$$

P' 为色泵噪声强度, τ 为噪声关联时间. $q(t) = q_1(t) + iq_2(t)$ 为高斯白噪声, 其性质为

$$\langle q_i(t) \rangle = 0, \quad \langle q_i(t) q_j(t') \rangle = 2\delta_{ij} P \delta(t-t'), \quad (i, j = 1, 2).$$

式中 P 为量子噪声强度. 取极坐标 $E = x e^{i\phi} = I^{1/2} e^{i\phi}$, $I = x^2$ 为光强, (11) 式的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 x - Ax^3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi/x & \cos \phi/x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

引入下列矢量和矩阵

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} a_0 x - Ax^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{g}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \underline{g}_2 = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi/x & \cos \phi/x \end{bmatrix}$$

并作变量变换 $x \rightarrow y$ 则(13)式成为加法色噪声形式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{H}[\mathbf{y}(\mathbf{X})] + \mathbf{p}(t) + P^{1/2} \mathbf{G}[\mathbf{y}(\mathbf{X})] \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}^{-1} \dot{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{H}[\mathbf{y}(\mathbf{X})] = \mathbf{g}(\mathbf{X})^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{G}[\mathbf{y}(\mathbf{x})] = \mathbf{g}(\mathbf{X})^{-1} \mathbf{g}_2(\mathbf{X}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

而色泵噪声 $\mathbf{p}(t)$ 作为随机过程, 其运动方程为

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{1}{\tau} \mathbf{p}(t) + \frac{P^{1/2}}{\tau} \zeta(t) \quad (15)$$

式中 $\zeta(t)$ 为高斯白噪声, 其性质为 $\langle \zeta(t) \rangle = 0$, $\langle \zeta_i(t) \zeta_j(t') \rangle = 2\delta_{ij} \delta(t-t')$, $(i, j=1, 2)$. 引入矢量 $\mathbf{v} = \mathbf{H} + \mathbf{p}(t)$, 并利用(15)式, (14)式可写为

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v} + P^{1/2} \mathbf{G}(\mathbf{y}) \mathbf{q}(t) \quad (16)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = [\mathbf{H}'(\mathbf{y}) - \frac{1}{\tau} \mathbf{I}] \mathbf{v} + \frac{1}{\tau} \mathbf{H}(\mathbf{y}) + \frac{P^{1/2}}{\tau} \zeta(t) + P^{1/2} \mathbf{G}(\mathbf{y}) \mathbf{H}'(\mathbf{y}) \mathbf{q}(t) \quad (17)$$

基中 $\mathbf{H}'(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -2Ax^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, \mathbf{I} 为单位矩阵. (16)式和(17)式绝热消去 \mathbf{v} , 用原来变量表示, 得

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_0 x - Ax^3}{C(x^2, \tau)} \\ 0 \end{bmatrix} + P^{1/2} \begin{bmatrix} \frac{x}{C(x^2, \tau)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} + P^{1/2} \begin{bmatrix} \cos \phi / C(x^2, \tau) & \sin \phi / C(x^2, \tau) \\ -\sin \phi / x & \cos \phi / x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

(18)式即为白噪声驱动的朗之万方程. 由于 $c(x^2, \tau) = 1 + 2\tau Ax^2 > 0$, 所以统一色噪声近似在整个相空间 (x, ϕ) 都有效, 由(18)式可得系统的福克-普朗克方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} W(x, \phi, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{a_0 x - Ax^3}{C(x^2, \tau)} + \frac{P'}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{C(x^2, \tau)} \right] \frac{x}{C(x^2, \tau)} + \frac{P}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{C(x^2, \tau)} \right] \frac{1}{C(x^2, \tau)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{P}{2x C(x^2, \tau)} \right\} W(x, \phi, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{P' x^2}{2C(x^2, \tau)^2} + \frac{P}{2C(x^2, \tau)^2} \right] W(x, \phi, t) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left[\frac{P'}{2} + \frac{P}{2x^2} \right] W(x, \phi, t) \end{aligned} \quad (19)$$

由于扩散函数不依赖于相位 ϕ , 通过引入约化概率密度 $Q(x, t) = \int_0^{2\pi} W(x, \phi, t) d\phi$, 可由(19)式得到 $Q(x, t)$ 的福克-普朗克方程

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} F(x) Q(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D(x) Q(x, t) \quad (20)$$

$$F(x) = \frac{a_0 x - Ax^3}{C(x^2, \tau)} + \frac{P'}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{C(x^2, \tau)} \right] \frac{x}{C(x^2, \tau)} + \frac{P}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{C(x^2, \tau)} \right] \frac{1}{C(x^2, \tau)} + \frac{P}{2x C(x^2, \tau)}$$

$$D(x) = \frac{P' x^2}{2C(x^2, \tau)^2} + \frac{P}{2C(x^2, \tau)^2} \quad (21)$$

式中 $F(x)$, $D(x)$ 分别为漂移函数和扩散函数.

4 色立方模型第一通过时间分布的平均值、协方差和偏斜率

第一通过时间分布的平均值 $\langle t \rangle$ 、协方差 $\langle (\Delta t)^2 \rangle$ 和偏斜率 $\langle (\Delta t)^3 \rangle$ 的表达式为^[6]

$$\langle t \rangle = \int_0^{x_0} \frac{dx}{V(x)} \int_0^x dy \frac{V(y)}{D(y)} + \int_{x_0}^{I_{ref}^{1/2}} \frac{dx}{V(x)} \int_0^x dy \frac{V(y)}{D(y)} \quad (22)$$

$$\langle (\Delta t)^2 \rangle = 4 \int_0^{x_0} \frac{dx}{V(x)} \int_0^x \frac{dy}{V(y)} \int_0^y d\zeta \frac{V(\zeta)}{D(\zeta)} \int_0^\zeta d\eta \frac{V(\eta)}{D(\eta)} + 4 \int_{x_0}^{I_{ref}^{1/2}} \frac{dx}{V(x)} \int_0^x \frac{dy}{V(y)} \int_0^y d\zeta \frac{V(\zeta)}{D(\zeta)} \int_0^\zeta d\eta \frac{V(\eta)}{D(\eta)} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta t)^3 \rangle = & 24 \int_0^{x_0} \frac{dx}{V(x)} \int_0^x \frac{dy}{V(y)} \int_0^y d\lambda \frac{V(\lambda)}{D(\lambda)} \int_0^\lambda d\rho \frac{1}{V(\rho)} \int_0^\rho d\zeta \frac{V(\zeta)}{D(\zeta)} \int_0^\zeta d\eta \frac{V(\eta)}{D(\eta)} \\ & + 24 \int_{x_0}^{I_{ref}^{1/2}} \frac{dx}{V(x)} \int_0^x \frac{dy}{V(y)} \int_0^y d\lambda \frac{V(\lambda)}{D(\lambda)} \int_0^\lambda d\rho \frac{1}{V(\rho)} \int_0^\rho d\zeta \frac{V(\zeta)}{D(\zeta)} \int_0^\zeta d\eta \frac{V(\eta)}{D(\eta)} \end{aligned} \quad (24)$$

式中 $V(x) = \exp\left(\int [F(x')/D(x')] dx'\right)$, 采用分区积分技术^[10], 即当 $0 \leq x \leq x_0$, ($x = \sqrt{P/P'}$) 量子噪声起主要作用, 泵噪声可忽略; 因为 x_0 很小非线性项也可忽略, 于是(21)式简化为

$$F(x) \approx a_0 x + P/2x, \quad D(x) \approx P/2 \quad (25)$$

而当 $x_0 \leq x \leq I_{ss}^{1/2}$ ($I_{ss} = a_0/A$) 泵噪声占统治地位, 量子噪声可忽略, 这时(21)式简化为

$$F(x) \approx \frac{a_0 x - Ax^3}{C(x^2, \tau)} + \frac{P'}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{C(x^2, \tau)} \right] \frac{x}{C(x^2, \tau)}, \quad D(x) \approx \frac{P' x^2}{2C(x^2, \tau)^2} \quad (26)$$

运用文献[6]中近似方法, 计算(22)、(23)和(24)式, 得到

$$\langle t \rangle = \frac{1}{2a_0} \left\{ C + \ln \frac{a_0^2}{PA} + \ln \frac{I_0}{1 - I_0} + 2a_0\tau \ln \frac{1}{1 - I_0} \right\} \quad (27)$$

其中 c 为欧拉常数, $I_0 = I_{ref}/I_{ss}$ 为相对光强.

$$\begin{aligned} \langle (\Delta t)^2 \rangle = & \frac{1}{(2a_0)^2} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \frac{2P'}{a_0} \left[\frac{(3/2) - I_0}{(1 - I_0)^2} + \ln \frac{I_0}{1 - I_0} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{2} + \ln \frac{a_0 P'}{AP} + a_0\tau \left(\frac{1}{(1 - I_0)^2} - 1 \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta t)^3 \rangle = & \frac{1}{(2a_0)^3} \left\{ 3 \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^3} - \frac{\pi^2 \ln 2}{3} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sum_{n=1}^{2j-1} \frac{1}{2^n} \right] + \right. \\ & 12 \left(\frac{P'}{a_0} \right)^2 \left[\left(\frac{25}{12} - \frac{13}{3} I_0 + \frac{7}{2} I_0^2 - I_0^3 \right) \frac{1}{(1 - I_0)^4} + \ln \frac{I_0}{1 - I_0} \right. \\ & \left. \left. - \frac{25}{12} + \ln \frac{a_0 P'}{AP} + \frac{a_0\tau}{2} \left(\frac{1}{(1 - I_0)^4} - 1 \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

在(27)~(29)式中令 $\tau = 0$, 可得到白立方模型第一通过时间分布的平均值、协方差和偏斜率的解析式, 亦即文献[10]中的(10)~(12)式.

结 论 朱士群等曾经对由色泵噪声驱动的立方模型做了第一通过时间分布的平均值、协方差和偏斜率的数值模拟^[2,3]. 又在该模型的泵噪声取为白噪声的情况下, 计算了这三个量, 并将理论值和模拟值进行了比较^[3,10]. 他们得出如下结论: 平均第一通过时间和数值模拟符合. 对协方差, 当相对光强在 $0 < I_0 < 0.7$ 范围内理论值和数值模拟符合, 相对光强 $I_0 \geq 0.7$ 以后, 协

方差随 I_0 的增加比数值模拟者慢, 对偏斜率, 相对光强在 $0 < I_0 < 0.8$ 内, 白泵噪声理论值与数值模拟相符合. 相对光强 $I_0 \geq 0.8$ 以后, 偏斜率随 I_0 的增加也比数值模拟者慢. 也就是说在这个范围内泵噪声的“颜色”的作用变得重要了.

下面将本文推导的第一通过时间分布的平均值、协方差和偏斜率公式(27)~(29)式, 用具体数据代入并画图. 所选参数为: $a_0 = 2.16 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$, $a_0 = 4.32 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ 和 $a_0 = 8.64 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ 三个不同的泵级; $\tau = (1/2.4) \times 10^{-6} \text{ s}$ 和 $\tau = (1/2.4) \times 10^{-7} \text{ s}$ 二个不同的泵噪声关联时间; 其余参数采用 B 组数据^[3]即: $A = 2.64 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$, $P = 0.0043 \text{ s}^{-1}$, $P' = 3 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$. 得如下结论:

1) 从图 1 可看出, 随相对光强的增加, 由(27)式计算出来色噪声近似的平均第一通过时间的增加比白噪声情况快^[3,10], 也就是说(27)式与数值模拟仅定性的符合.

2) 泵噪声关联时间的影响: 从图 1(a)和(b)可看出, 当噪声关联时间 $\tau = (1/2.4) \times 10^{-7} \text{ s}$, (27)式与白噪声情况符合极好^[3,10], 这说明已进入统一色噪声近似精确范围.

3) 图 2(a)表明: 在相对光强 $0 < I_0 < 0.7$ 的范围内, 由(28)式计算的协方差与白噪声情况的完全符合^[3,10]. 而当 $I_0 \geq 0.7$ 以后, 随着相对光强 I_0 的增加, 协方差的增加比白噪声情形的快, 更接近数值模拟解.

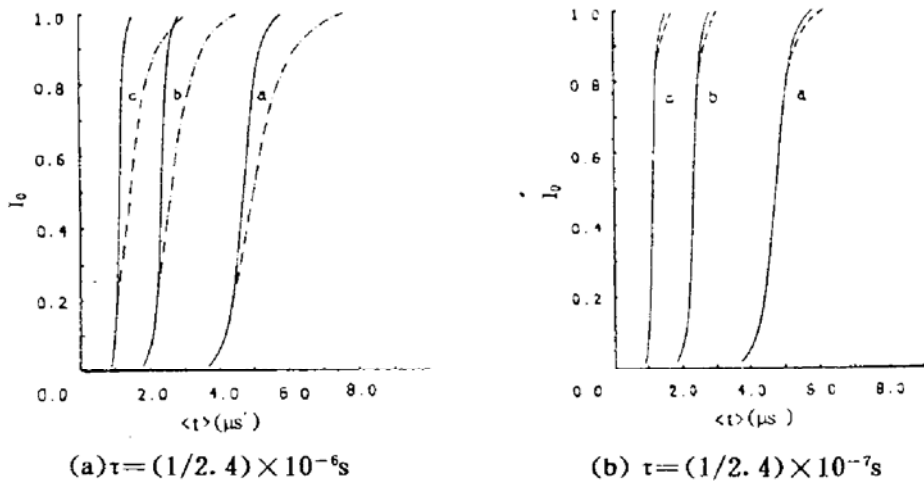


Fig. 1 The mean first passage time—, the case of white pump noise^[3,10]; - · -, the result of Eq. (27); curve a, $a_0 = 2.16 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$; curve b, $a_0 = 4.32 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$; curve c, $a_0 = 8.64 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$. The other laser parameters are those of set B

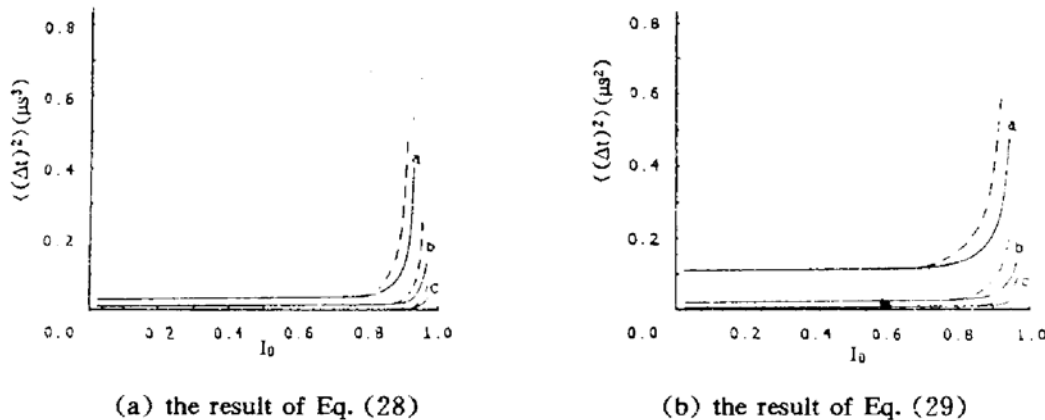


Fig. 2 The variance of first-passage-time distribution. —, the case of white pump noise^[3,10]; - · -, $\tau = (1/2.4) \times 10^{-6} \text{ s}$, curve a, $a_0 = 2.16 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$; curve b, $a_0 = 4.32 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$; curve c, $a_0 = 8.64 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$. The other laser parameters are those of set B

4) 图 2(b) 也表明: 在 $0 < I_0 < 0.8$ 范围内(29) 式的计算结果与白噪声情况完全符合^[3,10], 而当 $I_0 \geq 0.8$ 以后, 随 I_0 的增加, 偏斜率的增加比白噪声的快, 更接近数值模拟解.

参 考 文 献

- [1] R. Graham, M. Hohnerback, A. Schenzle, Statistical properties of light from a dye laser. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **48**(20) : 1397~1399
- [2] R. Roy, A. W. Yu, S. Zhu, Quantum fluctuations, pump noise, and the growth of laser radiation. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**(25) : 2794~2797
- [3] S. Zhu, A. W. Yu, R. Roy, Statistical fluctuations in laser transient. *Phys. Rev. (A)*, 1986, **34**(5) : 4333~4347
- [4] A. W. Yu, Govind, P. Agrawal, R. Roy, Noise propagation from pump to secondary lasers. *Opt. Lett.*, 1987, **12**(10) : 806~808
- [5] E. P. Lopez, F. J. de la Rebia, B. J. West *et al.*, Dye-laser equation with saturation and its best Fokker-Planck equation. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**(8) : 4026~4035
- [6] Cao Li, Wu Dajin, Luo Xueli, Effects of saturation in the transient process of a dye laser. I. White noise case. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(9) : 6838~6847
- [7] Cao Li, Wu Dajin, Luo Xueli, Effects of saturation in the transient process of a dye laser. II. Colored noise case. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(9) : 6848~6856
- [8] P. Jung, P. Hangghi, Dynamical systems: A unified colored-noise approximation. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35**(10) : 4464~4467
- [9] P. Jung, P. Hanggi, P. Hanggi, Optical instabilities: New theories for colored-noise-driven laser instabilities. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1988, **5**(5) : 979~986
- [10] S. Zhu, Effects of multiplicative white and colored noise in dye-laser theory. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **41**(3) : 1689~1694

The First-Passage-Time Distribution of the Dye-Laser Colored Cubic Model

Mei Dongcheng

(National Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Cao Li Wu Dajin

(National Laboratory of Laser Technology and Department of Physics,
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

(Received 16 November 1992; revised 3 March 1993)

Abstract

The unified-colored-noise approximation proposed by Jung and Hänggi is extended to the multi-dimensional case in this paper. Then, the Langevin equation and Fokker-Planck equation of colored cubic model for single mode dye-laser model are derived with this approximation method. The approximate formulas of the mean, variance, and skewness of the first-passage-time distribution for the model are obtained and compared with the numerical simulations.

Key words first-passage-time distribution, colored pump noise, unified-colored-noise approximation.