

康普顿型谐波自由电子激光器的增益 与饱和特性

李晓雄 傅恩生 王之江

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘 要 本文用微扰方法计算了电子分布函数, 得到了康普顿(Compton)型谐波自由电子激光器小信号增益及饱和增益的公式, 最后对模型及结果进行了分析与讨论.

关键词 谐波自由电子激光, 小信号增益, 饱和.

1 引 言

短波长自由电子激光是一个有广阔发展前途的领域. 增加电子的能量(γ)、缩短摆动器的周期(λ_w)以及自由电子激光的高次谐波运转, 都可以实现短波长自由电子激光. 然而, 增加 γ 会导致费用的急剧增加^[1]以及结构的庞大; 故缩短 λ_w 的小周期摆动器及微摆动器是一个活跃的领域^[2]; 自由电子激光的谐波运转是另一实现短波长自由电子激光的有效途径, 已经得到人们的广泛重视^[3~6].

本文的目的是研究康普顿型谐波自由电子激光的小信号增益及其饱和特性. 采用一维模型, 从动力学理论出发, 用微扰的方法求解关于电子分布函数的 Vlasov 方程, 得到了采用平面摆动器的康普顿型谐波自由电子激光的小信号增益公式以及饱和系数公式. 结果表明, 小能散对小信号增益的影响与 Datolli 等的拟合公式^[7]一致. 结果还表明, 谐波自由电子激光对电子束品质提出了更高的要求, 而且随着谐波阶数的增加, 对电子束品质的要求越来越苛刻.

2 Vlasov 方程及其微扰解

考虑平面摆动器:

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \sin(k_0 z) \mathbf{e}_y \quad (1)$$

式中 $k_0 = 2\pi/\lambda_w$, 摆动器的周期数为 N , 其长度 $L_w = N\lambda_w$, B_0 为峰值磁场强度. 光场采用准单色近似:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s &= E_s \sin(h\omega_s \tau + \phi_s) \mathbf{e}_z \\ \tau &= t - z/c, \quad \omega_s = (1 + K^2)/(2\gamma_r^2)ck_0, \quad K = eB_0/(2^{1/2}mck_0), \end{aligned} \quad (2)$$

式中 e, m, c 分别为电子的电荷、质量及真空中的光速, K 为摆动器参数, γ_r 为电子的共振能量系

数(洛仑兹系数), h 为谐波阶数($h = 1, 3, 5, 7, \dots$). 从麦克斯韦方程组及玻耳兹曼方程出发, 在忽略电子间相互作用及采用慢变包络近似(SVEA)后, 可以得到耦合的 Maxwell-Vlasov 方程组:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_s &= -\text{Coef} \iint \frac{\sin(h\theta + \phi_s)}{\gamma} \langle f \rangle d\theta d\gamma \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \phi_s &= -\frac{\text{Coef}}{E_s} \iint \frac{\cos(h\theta + \phi_s)}{\gamma} \langle f \rangle d\theta d\gamma \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} + \left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial \theta} + \left\langle \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial \gamma} \approx 0 \quad (4)$$

$$\left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle \approx \eta, \quad \left\langle \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle \approx w_0 \Omega \sin(h\theta + \phi_s) \quad (5)$$

式中 $\text{Coef} = 2^{-1/2} e c^2 \mu_0 K F(h, \xi) \rho_e$, $F(h, \xi) = (-1)^{(h-1)/2} (J_{(h-1)/2}(h\xi) - J_{(h+1)/2}(h\xi))$, $\xi = K^2 / (2(1 + K^2))$, $\eta = 2\omega_0(1 - \gamma/\gamma_r)$, $\omega_0 = ck_0$; $\Omega = KK_r F(h, \xi) / \gamma_r$, 真空中的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$, $J_n(x)$ 为 n 阶 Bessel 函数; ρ_e 为电子数密度, 对康普顿型自由电子激光, $\rho_e \sim 10^{15} \times I_r (1/\text{m}^3)$, I_r 为电子束峰值电流; 光场参数 $K_r = eE_r / (2^{1/2} mc^2 k_0)$; 共振参数 $\theta = \omega_r \tau - k_0 \bar{z}$, \bar{z} 为电子在摆动器中运动的“包络”; $f(\gamma, \theta, t)$ 是单电子的分布函数; $\langle \rangle$ 表示平均运算

$$\langle \text{function}(z) \rangle = (1/\lambda_w) \int_z^{z+\lambda_w} \text{function}(z) dz$$

所以以后可以简计 $\langle f \rangle$ 为 f .

康普顿型自由电子激光的 ρ_e 较小, 因而 Coef 较小, 可以认为单程内 E_s 变化不大, 而且 ϕ_s 近似锁定. 一般情况下 $\Omega \ll 1$, 所以可以由(4)式微扰地解得 f . 设

$$\left. \begin{aligned} f(\gamma, \theta, t) &= f_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \Omega^q f_q(\gamma, \theta, t), \quad f_0 = f(\gamma, \theta, 0) \\ \left| \frac{n}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right| &\ll \left| \frac{1}{f_q} \frac{\partial f_q}{\partial q} \right|, \quad q = t, \theta \\ \phi_s &\approx \phi_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将(6)代入(4)式, 可以得到

$$\frac{\partial f_0}{\partial \theta} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial f_q}{\partial t} + \eta \frac{\partial f_q}{\partial \theta} = -w_0 \sin(h\theta) \frac{\partial f_{q-1}}{\partial \gamma} \quad (8)$$

(7)式表明电子束没有预聚束将 $f_s(\gamma, \theta, t)$ 向正弦和余弦展开 $f_s(\gamma, \theta, t) = f_{s0} + \sum_{m=1}^{\infty} f_{sm} \cos(m\theta)$

+ $\sum_{m'=1}^{\infty} f_{sm'} \sin(m'\theta)$. 则(8)式可得

$$\left. \begin{aligned} f_{20} &= \frac{(\omega_0 t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} \frac{1 - \cos(h\eta t)}{(h\eta t)^2} \right\} \\ f_{40} &= -\frac{(\omega_0 t)^4}{32} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{\partial^2 f_0}{\partial \gamma^2} \frac{[1 - \cos(2h\eta t)] - 4[1 - \cos(h\eta t)]}{(h\eta t)^4} \right\} - \frac{h^2 (\omega_0 t)^6}{4\gamma_r^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} F_0(h\eta t) \right\} \\ F_0(x) &= \frac{-8(1 - \cos x) + 9x \sin x - x^2 \cos x - 3[1 - \cos(2x)] + x \sin(2x)}{x^6} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

摆动器中电子的能量变化

$$\begin{aligned}
 \Delta\langle\gamma\rangle_{\text{ens}} &= \langle\gamma\rangle_{\text{ens}} - \langle\gamma\rangle_{\text{ens}}|_{t=0} = \Omega^2 \int \gamma f_{20} d\gamma + \Omega^4 \int \gamma f_{40} d\gamma + O(\Omega^6) \\
 &\approx -\frac{2h(\omega_0 t)^3 \Omega^2}{\gamma_r} \int F_1(h\eta t) f_0(\gamma) d\gamma + \frac{h^3(\omega_0 t)^7 \Omega^4}{2\gamma_r^3} \int F_2(h\eta t) f_0(\gamma) d\gamma \\
 \langle\gamma\rangle_{\text{ens}} &= \iint \gamma f(\gamma, \theta, t) d\theta d\gamma, \quad F_1(x) = -\frac{(x/2) \sin x - \cos x + 1}{x^3}, \\
 F_2(x) &= \frac{(x^2 - 53)x \sin x + (13x^2 - 48) \cos x + (2x^2 - 18) \cos(2x) - 11x \sin(2x) + 66}{x^7}
 \end{aligned} \tag{10}$$

式中 $O(\Omega^6)$ 表示与 Ω^6 同量级的小量.

3 自由电子激光的小信号增益及其饱和

假设电子损失的能量全部转化为光场能量, 那么

$$\Delta I_s = -\frac{\Delta\langle\gamma\rangle_{\text{ens}} mc^2 n_e}{\sum_i \tau_i} \tag{11}$$

式中 n_e 为电子束中电子数, \sum_i 为激光束在摆动器中的横截面, τ_i 为激光脉冲持续时间, 在长脉冲情形下 $\tau_i \approx \tau_0 = l_b/c$, l_b 为电子束长度. 这里已假设光脉冲中光强是均匀的. 将(9)、(10)式代入(11)式, 可以得到在摆动器出口处 ($t = L_w/c$) 光强演化方程

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dI_s}{dn} &= gI_s - \alpha I_s^2 \\
 g &= \frac{2(2\pi N)^3 F_c \rho_e h K^2 F^2(h, \xi) e^2}{mc^2 k_0 \epsilon_0 \gamma_r^3} \int F_1(X) f_0(\gamma) d\gamma \\
 \alpha &= \frac{(2\pi N)^7 F_c \rho_e h^3 K^4 F^4(h, \xi) e^4}{2m^3 c^7 k_0^4 \epsilon_0^2 \gamma_r^7} \int F_2(X) f_0(\gamma) d\gamma
 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

式中 n 为激光脉冲在光腔内的往返次数, 式中 $X = 4\pi N h(1 - \gamma/\gamma_r)$, 填充因子 $F_c = \sum_b/\sum_i \leq 1$, 电子密度 $\rho_e = n_e/(\sum_b l_b) = I_s/(e\sum_b c)$, 电子束横截面 \sum_b 的最佳值由光场的衍射极限决定, $\sum_b \approx N\lambda_w \lambda_s/h$, $\lambda_s = [(1 + K^2)/(2\gamma_r^2)]\lambda_w$. 此时 $F_c \approx 1$, (12)式简化为

$$\left. \begin{aligned}
 g &= 0.037 \xi [hNF(h, \xi)]^2 \frac{I_s}{\gamma_r} \int F_1(X) f_0(\gamma) d\gamma \\
 &= 0.037 N^2 F_g(h, \xi) \frac{I_s}{\gamma_r} \int F_1(X) f_0(\gamma) d\gamma \\
 \alpha &= 5.230 \times 10^{-10} \xi [hNF(h, \xi)]^4 N^2 \lambda_w^2 K^2 \frac{I_s}{\gamma_r^5} \int F_2(X) f_0(\gamma) d\gamma \\
 &= 5.230 \times 10^{-10} F_a(h, \xi) N^6 \lambda_w^2 \frac{I_s}{\gamma_r^5} \int F_2(X) f_0(\gamma) d\gamma \\
 F_g(h, \xi) &= \xi h^2 F^2(h, \xi), \quad F_a(h, \xi) = \frac{2\xi^2}{1 - 2\xi} h^4 F^4(h, \xi) \\
 \text{而 } g_{\text{max}} &= 0.037 F_g(h, \xi) N^2 \frac{I_s}{\gamma_r} [F_1(X)]_{\text{max}} \int f_0(\gamma) d\gamma = 0.0025 F_g(h, \xi) N^2 \frac{I_s}{\gamma_r}
 \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

设电子束初始能量分布 $f_0(\gamma)$ 是高斯型的:

$$f_0(\gamma) = \{ \exp [- (\gamma - \gamma_c)^2 / (2\sigma_e^2)] \} / (2\pi\sigma_e^2)^{1/2}$$

式中 γ_c 为电子束中心能量系数, σ_e 表示能散: $\langle \gamma \rangle_{ens} = \int \gamma f_0(\gamma) d\gamma = \gamma_c$, $\langle \gamma^2 \rangle_{ens} = 2\sigma_e^2$.

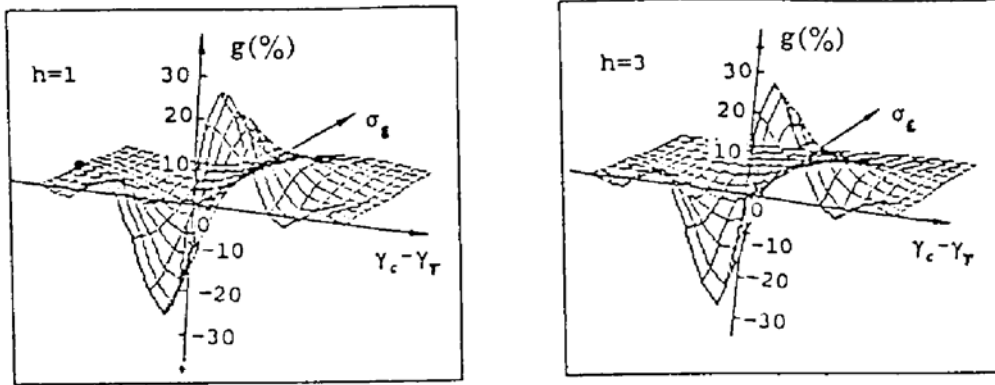


Fig. 1 Small signal gain vs. γ_c, σ_e .

$N = 50, I_p = 10 \text{ A}, K = 1.06, \gamma_r = 45, \lambda_w = 3 \text{ cm}, \lambda_s = 15.73 \mu\text{m}, \gamma_r(1 - 1/Nh) \leq \gamma_c \leq \gamma_r(1 + 1/Nh), 0 \leq \sigma_e/\gamma_r \leq 1\%, g_{max} = 26.6\% (h = 1), g_{max} = 28.1\% (h = 3)$

图 1. 给出了 g 与 γ_c, σ_e 的关系 ($h = 1, 3$), 可以发现: 最大增益在 $\gamma_c = \gamma_{cmax} = \gamma_r[1 + 1/(5Nh)]$ 和 $\sigma_e = 0$ 处取得. 显然, 对不同的谐波 h 其 γ_{cmax} 是不同的. 在 γ_{cmax} 和 $\sigma_e = 0$ 附近对 $F_1(X)$ 用泰勒展开, 得到

$$\int F_1(X) f_0(\gamma) d\gamma \approx 0.0675(1 - 1.62h^2\mu_e^2 - 1.03h^2\delta^2) \approx 0.0675 \frac{1}{1 + 1.62h^2\mu_e^2} \frac{1}{1 + 1.03h^2\delta^2} \quad (15)$$

式中 $\mu_e = 4N(\delta\gamma/\gamma)$, $\delta\gamma = \sqrt{\langle \gamma^2 \rangle_{ens}} = \sqrt{2}\sigma_e$, $\delta = 5N[(\gamma_c/\gamma_r) - 1] - 1$. 可见 g 随小能散的变化

$$g = \frac{g_{max}}{1 + 1.62h^2\mu_e^2} \quad (16)$$

与 Dattoli 等的拟合公式^[7]

$$g = \frac{g_{max}}{1 + 1.7h^2\mu_e^2} \quad (17)$$

一致. 计自由电子激光的损耗为 $1/(2Q)$, 自由电子激光光强的演化可表示为

$$\frac{dI_s}{dn} = (g - \frac{1}{2Q})I_s - \alpha I_s^2 \quad (18)$$

只有当 $g - 1/2Q > 0$ 时, 自由电子激光才能振荡. 此时若 $\alpha < 0$, 则(14)式不再适于描述光强的饱和过程, 方程中还应考虑关于 I_s 的更高阶的项, 如 $\alpha_1 I_s^3, \alpha_2 I_s^4$ 等. 对于大多数自由电子激光, $\alpha > 0$, 此时(10)式的非平稳态解为

$$I_{sat} = \frac{g - 1/(2Q)}{\alpha} \quad (19)$$

自由电子激光的饱和增益可以表示为

$$g_{sat} = [g - 1/(2Q)] - \alpha I_s$$

当 $I_s \ll I_{sat}$ 时

$$g_{\text{sat}} = \frac{g - \frac{1}{2Q}}{1 + \frac{I_s}{I_{\text{sat}}}} \quad (20)$$

图 2 给出了自由电子激光 ($h = 1, 3$) 的典型饱和过程. 可以发现即使光强 I_s 达到饱和值 $I_{\text{sat}} = 60 \text{ MW/cm}^2$ (图 2), 仍有 $\Omega \ll 1$, 对分布函数的微扰展开 (6) 式仍然成立. 因此, 用微扰方法计算的结果 (12) 式可以描述谐波自由电子激光的饱和行为.

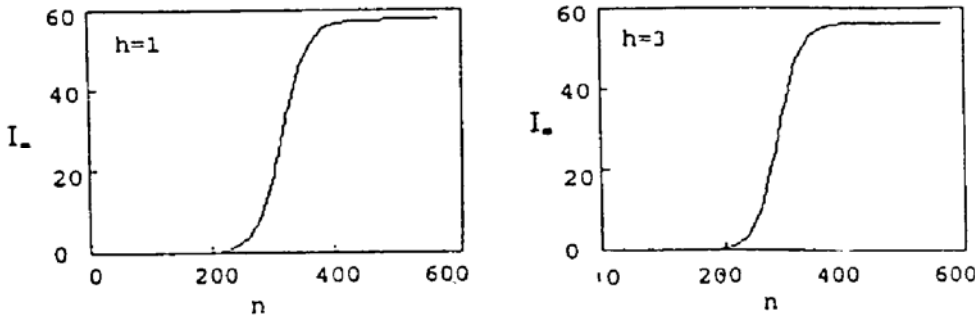


Fig. 2 Laser intensity I_s (MW/cm^2) vs. pass number n

$$N = 50, I_s = 10 A, K = 1.06, \nu_r = 45, \lambda_w = 3 \text{ cm}, \lambda_s = 15.73 \mu\text{m}, \delta_r/\gamma = 7.1\%, \\ 1/(2Q) = 3\%, \nu_c = \nu_r [1 + 1/(5Nh)]$$

4 讨 论

4.1 对模型的讨论

本文讨论的是没有预聚束的长脉冲自由电子激光, g 为 Φ_s 锁定情况下的小信号增益, 饱和系数 α 来源于激光诱导能散. 对于有预聚束的自由电子激光, 假设 (6) 式不成立, 所以必须将描述光场的 Maxwell 方程组与 Vlasov 方程联合求解. 对于电子束较短的情况, 如射频自由电子激光, 脉冲传输效应对小信号增益的影响可由下式近似给出^[7]

$$g \approx \frac{0.85}{1 + \mu_c/3} g_0 \quad (21)$$

式中, g_0 为长脉冲自由电子激光的小信号增益, $\mu_c = \Delta/\sigma_z$, $\Delta = N\lambda_w$, σ_z 为电子束纵向长.

关于饱和效应, G. Dattoli 等^[8] 讨论了短电子束时 (射频自由电子激光) 的饱和情况; 对于电子束特别短的情形 (如储存环自由电子激光), 调谐效应将对饱和起较大影响^[9].

由于自由电子激光内能起振的模数 $\sim \nu^2 \sim 10^3$, 所以将光场用多模表示:

$$E_s = \left\{ \sum_{m,h} E_{s,m} \sin (h\omega_m \tau + \phi_{s,m}) \right\}_z \hat{e} \quad (22)$$

(式中 m, h 分别表示腔频及其谐波, $h = 1, 3, 5, \dots, H$, $m = 1, 2, \dots, M$.) 更为合适, 由此可以讨论基波自由电子激光中的高次谐波的产生及边带效应等问题. 另外, 为了考虑光束及电子束的横向截面效应, 如光导效应, 可以将讨论推广至三维是必要的: 光场用实腔模表示^[10], 电子束是高斯型的, 变化宗量由 (y, θ, t) 变为 $(y_r, y_s, y_z, \theta_r, \theta_s, \theta_z, t)$, 由耦合的 Maxwell-Vlasov 方程组描述自由电子激光过程.

4.2 对结果的讨论

由 (22) 式、(16) 式可知: 谐波阶数越高, 电子束能散对小信号增益的影响越大. 设 $N = 50$, 则由 (22) 式可以求得在半最大增益处要求: $h = 3$ 时 $\delta\gamma/\gamma \sim 1.7\%$, $h = 5$ 时 $\delta\gamma/\gamma \sim 1.0\%$, $h =$

7 时 $\delta\gamma/\gamma \sim 0.72\%$. $\delta\gamma/\gamma < 1\%$ 的要求对电子枪及电子加速、输运系统来说是十分苛刻的, 除非以降低增益为代价来降低对系统的要求. 并且光束与电子束充分耦合(使 $F_e = 1$) 要求电子束截面 $\Sigma_e \approx N\lambda_w\lambda_s/h$, 显然谐波阶数越高要求越苛刻. 所以实际上 $h > 5$ 的谐波振荡是很困难的.

由(13)式可以得到小信号增益 g 、饱和系数 α 与 h 及参数 K 、 N 等的关系, 图 3 给出 $F_r(h, \xi)$ 、 $F_o(h, \xi)$ 与 K 的关系 [$K^2 = 2\xi/(1 - 2\xi)$]. 计算表明 $K > 1.02$ 时 $F_r(3, \xi) > F_r(1, \xi)$, $K > 1.20$ 时 $F_r(5, \xi) > F_r(1, \xi)$; $K < 1.03$ 时 $F_o(3, \xi) > F_o(1, \xi)$, $K < 1.20$ 时 $F_o(5, \xi) < F_o(1, \xi)$, 所以对谐波起振来说 K 越大越好, 对产生谐波高功率振荡来说 K 不能太大, 参数的实际选择取决于自由电子激光的用途. 同样, $g \propto N^2$, $\alpha \propto N^6$, 并且高的 N 值使得增益宽度变小 [$\delta v/v \sim 1/(2hN)$], 所以 N 的考虑也需要折衷.

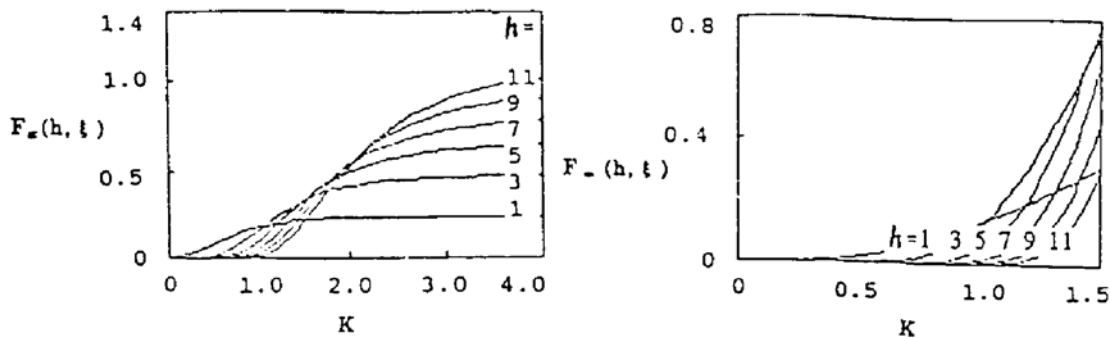


Fig. 3 $F_r(h, \xi)$, $F_o(h, \xi)$ vs. K ($h = 1, 3, 5, 7, 9, 11$)

5 结 论

本文得到了采用平面摆动器的康普顿型谐波自由电子激光的小信号增益及增益饱和系数的(13)式. 小信号增益的结论与文献[7]中的拟合公式一致, 饱和系数可以用来描述谐波自由电子激光中的各种饱和现象.

参 考 文 献

- [1] U. Bizzarri, F. Ciocci, G. Dattoli, *et al.*, The Free Electron Laser: Status and Perspectives. *Nuovo Cimento*, 1986, RT/TIB/85/49, 131~135
- [2] R. W. Warren, Design considerations for pulsed microwigglers. *Nucl. Instrum. & Meth.*, 1991, A304: 765~769
- [3] R. Prazeres, P. Guyot-Sionnest, J. M. Ortega, *et al.*, Coherent harmonic generation in VUV with the optical klystron on the storage ring Super-ACO, *Nucl. Instrum. & Meth.*, 1991, A304: 72~76
S. Werin, M. Eriksson, J. Larsson, *et al.*, Harmonic generation at the Max-lab undulator. Report of the first results. *Nucl. Instrum. & Meth.*, 1991, A304: 81~85
- [4] M. J. Schmitt, B. D. McVey, Three-dimensional simulations of harmonic radiation and harmonic lasing. *Nucl. Instrum. & Meth.*, 1991, A304: 571~582
S. Kuruma, S. K. Mima, K. Ohi, *et al.*, Simulation of higher-harmonics generation in a FEL. *Nucl. Instrum. & Meth.*, 1991, A304: 638: 640
- [5] R. W. Warren, Lasing on higher harmonics. *Nucl. Instrum. & Meth.*, 1991, A304: 512~515
- [6] 傅恩生、凌根深、王之江, 工作在可见和紫外波段的自由电子激光器. *光学学报*, 1987, 7(4): 317~323

- 傅恩生、王之江, Properties of higher harmonic operation in storage ring FEL. *Chinese Physics, Lasers*, 1988, 15 (5) : 319~321
- [7] G. Dattoli, T. Letardi, J. M. J. Madey *et al.* , Lawson-Penner limit and single passage free electron lasers performances. *IEEE J. Quant. Electron.* , 1984, QE-20(6) : 637~646
G. Dattoli, T. Letardi, J. M. J. Madey *et al.* , Limits on the single-pass higher harmonics FEL operation. *IEEE J. Quant. Electron.* , 1984, QE-20(9) : 1003~1005
- [8] G. Dattoli, L. Giannessi, S. Cabrini *et al.* , Gain saturation in bunched free-electron laser. *Phys. Rev. (A)*, 1992, A45(12) : 8842~8845
- [9] M. Billardon, D. Garzella, M. E. couprie, Saturation mechanism for a storage-ring free-electron laser. *Phys. Rev. Lett.* , 1992, 69(16) : 2368~2371
- [10] C. M. Tang, P. Sprangle, A. Ting *et al.* , Radio-frequency linac-driven free-electron laser configurations. *J. Appl. Phys.* , 1989, 66(4) : 1549~1555

Harmonic Free Electron Laser Operating in Compton Region : Gain and Its Saturation

Li Xiaoxiong Fu Ensheng Wang Zhijiang

(Shanghai Institute of Optics & Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

(Received 9 November 1992; revised 5 April 1993)

Abstract The method of perturbation used for calculating the electron distribution function is described. The small signal gain and saturation gain of harmonic free electron laser operating in Compton region with planar undulator are obtained. Analyses and discussions on the model and results are given in this paper.

Key words harmonic free electron laser, small signal gain, saturation