

多元件谐振腔的等价腔

曹 清 张为俊 罗治江 夏宇兴

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

摘 要 本文使用光学变换矩阵方法,分析了多元件谐振腔的等价腔问题.发展了等价腔的一些概念和方法,推出了在普遍情况下,等价腔各参量与原谐振腔各参量之间的解析关系,并得到了一组不变量;同时,还澄清了一些关于等价腔的错误看法和易混淆之处.

关键词 等价腔, 矩阵光学, 等价关系.

1 引 言

在谐振腔中,为提高激光束质量,如增大模体积、降低发散角等,通常插入薄透镜、望远镜等光学元件,从而构成多元件谐振腔.等价腔方法就是简化分析多元件谐振腔的一种重要方法.Kogelnik首次提出了等价腔的概念^[1],并用此方法讨论了内含单个薄透镜的谐振腔.至今,有关等价腔的文章已有多篇发表^[1~9],它们大多讨论只内含单个薄透镜的光腔的等价腔问题,且采用一个反射镜面不变、另一个反射镜面变为等价镜面的方法;对于内含更多光学元件的谐振腔,则利用Kogelnik推出的模像关系,通过每个光学元件逐次求出或采用光具组方法求出等价镜面的位置与曲率半径.但使用起来较为复杂,不能直接给出等价腔和原谐振腔各主要参量之间的关系,且存在一些易混淆之处^[6~8].

本文利用光学变换矩阵,采用两反射镜面同时等价的方法,分析了一般多元件谐振腔的等价腔问题,推出了 g_i 、 g_i^- , W_i 、 W_i^- , θ_i 、 θ_i^- 之间的解析关系,得到了一组不变量: u_1 、 u_2 、 x 、 p_1 、 p_2 、 g_1 、 g_2 ;澄清了一些关于等价腔的错误看法和易混淆之处.本文方法表述简洁、使用方便,是分析多元件谐振腔的一种有效方法.

2 用矩阵光学表述物像关系

为了对等价腔进行详细讨论,首先用光学变换矩阵来表述物像关系.为便于后面的讨论,这里分两种情况来表述物像关系.第一种情况:物在左、像在右;第二种情况:物在右、像在左.对于第一种情况,如图1所示,用 xoy 表示物方,用 $x'o'y'$ 表示像方, oy 平面到 $o'y'$ 平面的光学变换矩阵为

$$M_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

设物方有一点 $P(x, y)$, 成像于像方一点 $P'(x', y')$, 则利用矩阵光学可得到以下的物像关系

$$x' = (A_1x - B_1)/(D_1 - C_1x), \quad y' = y/(D_1 - C_1x). \quad (2)$$

对于第二种情况, 如图 2 所示, 同样可得到另一组物像关系

$$x' = (D_2x - B_2)/(A_2 - C_2x), \quad y' = y/(A_2 - C_2x). \quad (3)$$

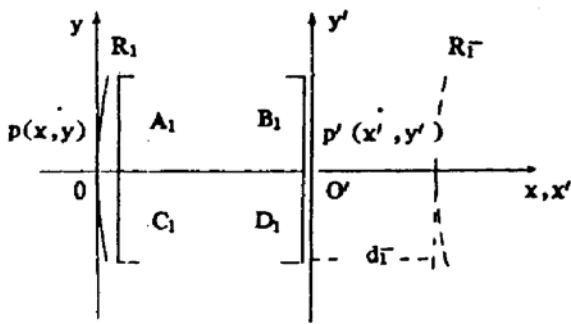


Fig. 1 Left mirror and its equivalent mirror

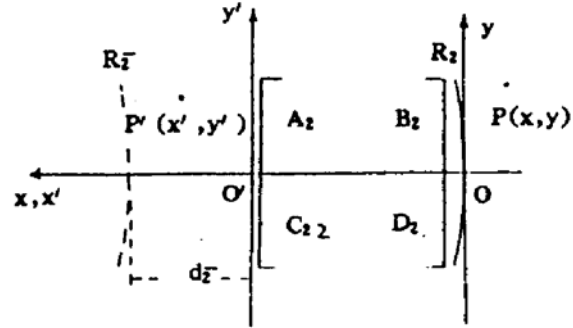


Fig. 2 Right mirror and its equivalent mirror

3 等价镜面与原镜面的关系

Kogelnik 用模像理论证明了原反射镜面和等价镜面的位置、球心位置分别满足物像关系。现用矩阵光学来表示这个关系, 对于左反射镜面及其等价镜面, 如图 1 所示, 设原镜面的位置在 o 点, 球心位置为 $(R, 0)$, 等价镜面在像方坐标中位置为 $(-d_1, 0)$, 球心位置为 $(x'_{01}, 0)$, 则可得到

$$d_1 = B_1/D_1, \quad x'_{01} = (A_1R_1 - B_1)/(D_1 - R_1C_1). \quad (4)$$

利用(4)式可得

$$R_1 = x'_{01} - (-d_1) = R_1/D_1(D_1 - R_1C_1), \quad \text{或} \quad (1/R_1) = D_1[(D_1/R_1) - C_1] \quad (5)$$

对于右反射镜面及其等价镜面, 如图 2 所示, 同样可得

$$d_2 = (B_2/A_2), \quad (1/R_2) = A_2[(A_2/R_2) - C_2]. \quad (6)$$

至此, 完成了用矩阵光学表述在普遍情况下等价镜面和原镜面的关系。需要指出的是, 等价镜面并不是原镜面所成的像, 而是这样一种情况: 高斯光束波面在原反射镜面处和原镜面重合, 通过矩阵变换到等价镜面的位置时, 其波面又和等价镜面相重合, 简略地说, 是模像关系。有些作者对此有误解^[6], 这大概是由于等价镜面和原镜面的位置、球心位置都分别满足物像关系之缘。

4 多元件谐振腔的等价腔

任何一个多元件谐振腔都可表示成图 3(a)的形式。

腔内单程传播矩阵 M 为

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

谐振腔的 g_1, g_2 参数为^[1]

$$g_1 = A - (B/R_1), \quad g_2 = D - (B/R_2). \quad (8)$$

作为一种普遍形式的等价腔表示, 可以使用参考平面 1、2, 对球面镜 R_1, R_2 通过中间矩

阵进行两反镜射面的同时等价, 得到的等价腔如图 3(b)所示. 图中 R_1^- 、 d_1^- 、 R_2^- 、 d_2^- 见(4)~(6)式.

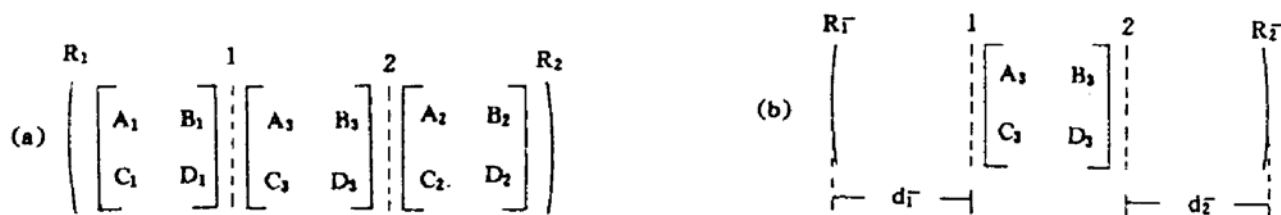


Fig. 3 General multielement resonator and its equivalent resonator

等价腔中的单程变换矩阵 M^- 及 g^- 参数为

$$M^- = \begin{bmatrix} A^- & B^- \\ C^- & D^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_2^- \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_1^- \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$g_1^- = A^- - (B^-/R_1^-), \quad g_2^- = D^- - (B^-/R_2^-). \quad (10)$$

可以证明

$$g_1^- = (D_1/A_1) g_1, \quad g_2^- = (A_2/D_1) g_2, \quad B^- = B/(A_2 D_1) \quad g_1^- g_2^- = g_1 g_2 \quad (11)$$

进一步还可证明

$$W_1^- = W_1/|D_1|, \quad W_2^- = W_2/|A_2|. \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_1^{-2} &= D_1^2 \theta_1^2 + (4\pi^2/k^2 \lambda^2) W_1^2 C_1 [C_1 - (2D_1/R_1)], \\ \theta_2^{-2} &= A_2^2 \theta_2^2 + (4\pi^2/k^2 \lambda^2) W_2^2 C_2 [C_2 - (2A_2/R_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

这些关系都是在普遍情况下得到的, 是对任何多元件谐振腔的等价腔都适用的. 对于具体的谐振腔及其等价腔, 只需将具体的参量代入上述关系即可.

可以看出, W_1^- 只与 D_1 、 W_1 有关, W_2^- 只与 A_2 、 W_2 有关; $g_1^- g_2^- = g_1 g_2$, 在等价过程中是不变量, 即等价腔不改变谐振腔的稳定性; θ_1^- 、 θ_2^- 与原谐振腔的关系较为复杂, 但当 $C_1 = 0$ 或 $C_1 R_1 = 2D_1$ 时, 有 $\theta_1^- = |D_1| \theta_1$; 当 $C_2 = 0$ 或 $C_2 R_2 = 2A_2$ 时, 有 $\theta_2^- = |A_2| \theta_2$. 对于 M_1 为单位矩阵的等价腔(左等价), 有 $W_1^- = W_1$ 、 $\theta_1^- = \theta_1$, 此时等价腔左端的输出特性和原谐振腔相同; 对于 M_2 为单位矩阵的等价腔(右等价), 有 $W_2^- = W_2$ 、 $\theta_2^- = \theta_2$, 此时等价腔右端的输出特性和原谐振腔相同.

正确地使用等价腔方法, 往往能使复杂谐振腔的分析得以大大简化. 等价腔的使用方法为: 根据实际情况, 选择合适的参考平面 1、参考平面 2 (有时使两参考平面重合或只用一个参考平面), 然后求得等价腔并对其进行分析, 最后利用以上各关系得到我们所要分析的原谐振腔的一些参量及其性质.

5 特例情况

5.1 两参考面重合情况

这种等价腔方式(如图 4 所示)是使用最多的一种等价腔, 对于这种等价腔, 除具有上节给出的所有性质外, 还存在一组不变量.

对于图 4 所示的原谐振及其等价腔, 若引入以下一组参量

Fig. 4 Equivalent resonator with a reference plane (M_3 is unitary)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= B_1[A_1 - (B_1/R_1)], & u_2 &= B_2[D_2 - (B_2/R_2)], & x &= -(D_1/B_1) - (A_2/B_2) \\ u_1^- &= d_1^- [1 - (d_1^-/R_1^-)], & u_2^- &= d_2^- [1 - (d_2^-/R_2^-)], & x^- &= -(1/d_1^-) - (1/d_2^-) \\ p_1 &= 1 + xu_1, & p_1^- &= 1 + x^-u_1^- \\ p_2 &= 1 + xu_2, & p_2^- &= 1 + x^-u_2^- \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

则有

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= -(B_2/B_1) p_1, & g_2 &= -(B_1/B_2) p_2, & B &= -B_1 B_2 x, \\ g_1^- &= -(d_2^-/d_1^-) p_1^-, & g_2^- &= -(d_1^-/d_2^-) p_2^-, & B^- &= -d_1^- d_2^- x^- \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

可以证明 $u_1^- = u_1$ 、 $u_2^- = u_2$ 、 $x^- = x$ 、 $p_1^- = p_1$ 、 $p_2^- = p_2$ 。由于 $p_1 p_2 = g_1 g_2$ ，能够表征谐振腔的稳定性，而 p_1 、 p_2 在等价过程中又是不变量，因而使用 p_1 、 p_2 在某些方面比使用 g_1 、 g_2 更优越，文献[10]就是用 p_1 、 p_2 分析了谐振腔的很多性质。这组参量除了具有在等价过程中是不变量这个优点外，还具有其它的一些优越性，如对于内含热透镜的谐振腔，热焦距只包含在 x 中，这使得它们在热稳腔分析中得到了广泛的应用^[11~12]。另外，这组不变量还具有一定的物理意义， $-2u_1$ 是参考面到反射面 R_1 ，再回到参考面处的广义光程； $2u_2$ 是参考面到反射面 R_2 ，再回到参考面处的广义光程；从(27)式可以看出，若把 $-x^-$ (或 $-x$) 看到广义光焦度，则 R_2^- 镜、 R_2^- 镜的位置恰好满足物像关系。

5.2 仅内含薄透镜的谐振腔

这是文献中讨论较多的一种谐振腔，它的等价腔可分为两种情况，分别如图 5(a)、图 5(b)所示。图 5(a)所示的是左等价腔，图 5(b)所示的是右等价腔。无论是左等价腔，还是右等价腔，只要代入上节中的(11)~(12)式，即能得到和文献[6~7]中完全相同的结果，而 θ_1^- 、 θ_1 、 θ_2^- 、 θ_2 等关系则是文献[6~7]所不能给出的。由于本文方法是对等价腔普遍情况的表述，既适用于左等价腔，又适用于右等价腔，从而避免了这两种等价腔方法可能引起的混淆之处。

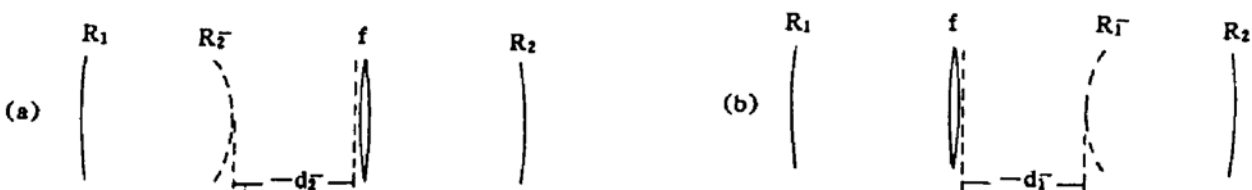


Fig. 5 Resonator with a lens and its two kinds of equivalent resonators

结 语 等价腔方法是处理多元件谐振腔的一种重要方法, 使用得当, 往往能使问题得以大大简化. 本文从普遍情况出发, 推得了等价腔与原谐振腔之间的普遍的解析关系, 从而使得等价腔方法变得更加实用, 使用起来也更加准确、方便.

参 考 文 献

- [1] H. Kogelnik, Imaging of optical modes-resonators with internal lenses. *Bell Syst. Tech. J.*, 1965, 44(3): 455
- [2] J. Steffen, J. P. Lörtscher, G. Herziger, Fundamental mode radiation with solid-state lasers. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1972, QE-8(2): 239
- [3] R. Hauck, H. P. Kortz, H. Weber, Misalignment sensitivity of optical resonators. *Appl. Opt.*, 1980, 19(40): 598
- [4] H. P. Kortz, R. Iffänder, H. Weber, Stability and beam divergence of multimode lasers with internal variable lenses. *Appl. Opt.*, 1981, 20(23): 4124
- [5] H. 韦伯, 激光谐振腔, 武汉, 华中工学院出版社, 1983: 111
- [6] P. Muys, H. Vanherzeele, Pitfalls in the use of equivalent resonators. *Appl. Opt.*, 1982, 21(22): 3983
- [7] G. Herziger, H. Weber, Equivalent optical resonators. *Appl. Opt.*, 1984, 23(10): 1450
- [8] 吕百达, 基模动态稳定望远镜谐振腔. *光学学报*, 1987, 7(2): 105
- [9] W. Koechner, Solid state laser engineering. New York, Springer, 1988, 2nd Edition: 183
- [10] S. DeSilvestri, P. Laporta, V. Magni, Novel stability diagrams for continuous-wave solid-state laser resonators. *Opt. Lett.*, 1986, 11(8): 513
- [11] V. Magni, Resonators for solid-state lasers with large-volume fundamental mode and high alignment stability. *Appl. Opt.*, 1986, 25(1): 107
- [12] S. De Silvestri, P. Laporta, V. Magni, The role of rod position in single-mode solid state laser resonators; optimization of a C_w mode-locking Nd: YAG laser. *Opt. Commun.*, 1986, 57(5): 339

Equivalent Resonators of Multielement Resonators

Cao Qing Zhang Weijun Luo Zhijiang Xia Yuxing
(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Hefei 230031)

(Received 3 January 1993)

Abstract By using optics transfer matrix, the equivalent resonators of multielement resonators are analysed. Some concepts and methods about equivalent resonators are developed. The analytic relations between general multielement resonators and their equivalent resonators are derived, and a group of unvariables are obtained. Furthermore, we put forward correction and accurate points of view about the equivalent resonators.

Key words equivalent resonators, matrix optics, equivalent relations.