第14卷 第2期
1994年2月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 14, No. 2
February, 1994

光纤中双孤子相互作用的等价粒子理论*

陈陆君** 梁昌洪 吴鸿适
(西安电子科技大学电磁工程系，西安 710071)

摘 要 本文给出了含有一般扰动的非线性薛定锷(Schrodinger)方程的孤子等价粒子理论，它使人们对孤子的粒子性质有了更深的了解，同时给出了光纤中双孤子相互作用的等价粒子分析，得到了与基于逆散射及微扰变分法完全一致的结果，这一方法可用于多孤子相互作用的解析分析，并能给出这一过程的直观物理图象.

关键词 孤子， 孤子相互作用， 微扰理论.

1 引 言

孤波(孤子)之所以这样称呼是因为它通常作为一个单一的实体出现且是局域分布的，而且，通常把单孤子解称作孤波，但多个出现在一解中时，称它们为孤子[1]，事实上，从1834年Russell对孤子在科学意义上发现到1965年Zabuky和Kruskal[2]对孤子碰撞性质的数值研究，孤子都表现出其粒子方面的性质. 因此，根据英文构字法，才创造了Soliton[2]. 但是，对孤子的研究，几乎都是从波的角度进行的，从粒子角度研究甚少，Aceves，Moloney和Newell[3~5]用等价粒子概念研究了自聚焦通道的反射问题，Kosevich[6]研究了孤子被杂质散射时的粒子特性及波特性，Lai和Haus[7]研究了孤子的各种量子力学性质. 本文提出光纤中双孤子相互作用的等价粒子理论，这除了能得到与已有的解析结果相一致的结果外，还给出了孤子相互作用过程中直观的物理图象.

2 等价粒子理论的一般描述

研究扰动的非线性薛定锷方程

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = \varepsilon\hat{U}(x,t)u = \hat{V}(x,t)u \tag{1}$$

式中 $\hat{V}(x,t)$ 一般为算子，可代表Raman自泵效应，高阶色散等. 非线性薛定锷方程支持拓扑孤子和非拓孤子，在非拓孤子情况下，波函数当 $|x|\to\infty$ 时趋于零(或一确定值)，或者说 $x\to\pm\infty$ 时无相位变化，因此积分

$$N(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)u^*(x,t)dx \tag{2}$$

收稿日期：1992年9月20日；收到修改稿日期：1993年3月18日.
* 国家自然科学基金资助项目. ** 西安电子科技大学物理系.

存在，如果对场不量子化，则(2)式 $N(t)$ 代表了经典(电)场的能量，如按文献[7]对场量子化后，$N(t)$ 则代表光子总数，这时 $u\to\hat{u}$, $u^*\to\hat{u}^+$ 分别对应于湮灭和产生算符. 根据量子力学，(1)式(未量子化)已蕴含了 u 作为一种粒子(不是光子)的波函数，这已是一个粒子处在自身相关势 $[V-2|u|^2u]$ 中的量子力学问题(这个粒子的经典力学应由牛顿方程描写)，在不研究讨论粒子的其它量子特性的情况下，对场(二次)量子化是不必要，事实上，文献[3～6]都是直接以(1)式为基础进行等粒子分析的，因此，本文处理也是如此. 从粒子角度看，$N(t)$ 代表粒子在 t 时刻出现在 $-\infty<x<+\infty$ 的几率，(1)式中 $\hat{V}=0$ 时的非线性薛定锷方程所描述的粒子的质量是 ½，因此孤子质量 M 与光子总数 $N(t)$ 的关系是 $M=N/2$. $|u(x,t)|^2$ 为孤子作为粒子(不是光子)出现在 x 点的几率，粒子所处位置是

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}xu(x,t)u^*(x,t)dx/N \tag{3}$$

对(2)式求导并利用(1)式有

$$\frac{dN}{dt}=-i\int_{-\infty}^{+\infty}[u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u^*]dx \tag{4}$$

如果算子满足

$$u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u^*=i2Huu^* \tag{5}$$

且 H 是空间不变或慢变函数(相对 $|u|^2$)，于是

$$dN/dt=2HN \tag{6}$$

可见 H 代表某种损耗或增益. 对(3)式求导并利用(1)、(4)式. 可得粒子速度

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\frac{i}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u\frac{\partial u^*}{\partial x}-u^*\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx-\bar{x}\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}-\frac{i}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}x[u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u^*]dx \tag{7}$$

于是粒子的动量是

$$Mv=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u\frac{\partial u^*}{\partial x}-u^*\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx-\frac{1}{2}\bar{x}\frac{dN}{dt}-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x[u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u^*]dx \tag{8}$$

由上式可得动量变化率

$$\frac{d(Mv)}{dt}=-\frac{1}{2}\bar{x}\frac{d^2N}{dt^2}-\frac{1}{2}\frac{dN}{dt}\frac{d\bar{x}}{dt}-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}x[u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u^*]dx-\frac{N}{2}\frac{\partial U_L}{\partial\bar{x}} \tag{9}$$

粒子加速度与动量变化率有如下关系

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}&=\frac{2}{N}\frac{d(Mv)}{dt}-\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}\frac{d\bar{x}}{dt}\\&=-\frac{\partial U_L}{\partial\bar{x}}-\frac{2}{N}\frac{dN}{dt}\frac{d\bar{x}}{dt}-\frac{1}{N}\frac{d^2N}{dt^2}\bar{x}-\frac{i}{N}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}x[u^*\hat{V}u-u\hat{V}^*u^*]dx\end{aligned} \tag{10}$$

其中势 U_L 由

$$\frac{\partial U_L}{\partial\bar{x}}=\frac{2}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u\frac{\partial\hat{V}^*}{\partial x}u^*+u^*\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}u\right)dx+\frac{2}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u\left(\hat{V}^*\frac{\partial}{\partial x}\right)u^*+u^*\left(\hat{V}\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right)dx \tag{11}$$

如果(5)式满足，则

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\frac{i}{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u\frac{\partial u^*}{\partial x}-u^*\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx,\qquad Mv=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u\frac{\partial u^*}{\partial x}-u^*\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx \tag{12}$$

$$\frac{d(Mv)}{dt}=-\frac{N}{2}\frac{\partial U_L}{\partial \bar{x}},\qquad \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}=-\frac{\partial U_L}{\partial \bar{x}}-2H\frac{d\bar{x}}{dt} \tag{13}$$

以上各式给出了孤子的各种粒子特性. 作出例子，考虑有耗系统，这时取 $\hat{V}=-i\Gamma$，即 $H=-\Gamma$，于是由(6) 式给出

$$N(t)=N(0)e^{-2\Gamma t} \tag{14}$$

由(11)式、(13)式给出

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=v=\text{恒量},\ Mv=M_0v_0e^{-2\Gamma t} \tag{15}$$

即孤子的动量与光子总数(孤子质量) 随时间呈指数减少，而孤子速度却不受损耗的影响. 对于三阶色散，$\hat{V}=i\beta(\partial^3/\partial x^3)$，代入(4)、(9)、(10) 式

$$\frac{dN}{dt}=0,\qquad \frac{dv}{dt}=0,\qquad \frac{d(Mv)}{dt}=0 \tag{16}$$

即三阶色散，在准确到 $O(\beta)$ 的情况下，不改变光子总数(孤子质量)，也不改变孤子的速度和动量.

3　光孤子对相互作用的等价粒子分析

按照 Anderson 等的方法[8]，把 N_s 个孤子近似地看成 N_s 个充分远离的单孤子解的迭加，即

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{N_s}u_i(x,t) \tag{17}$$

(17)式代入(1)式并按文献[8]中方式分离得

$$i\frac{\partial u_k}{\partial t}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}+2|u_k|^2u_k=\hat{V}_ku_k,\qquad -\hat{V}_k=2\sum_{j=k}^{N_s}u_j^*u_k+4\sum_{j\neq k}^{N_s}u_ju_k^* \tag{18}$$

$$u_k(x,t)=a_k(t)\mathrm{sech}\{a_k(t)[x-x_k(t)]\}\exp\{ib_k(t)(x-x_k(t)+i\delta_k(t)\} \tag{19}$$

为简单计，本文只考虑两孤子的相互作用，并设幅值相等，把 x 坐标移到两孤子的质心，(19) 式中的指数部分简写为 $i\theta_k(x,t)$，则

$$\begin{cases} u_1(x,t)=\eta_0(t)\mathrm{sech}[\eta_0(t)(x-a(t)]\exp[i\theta_1(x,t)] \\ u_2(x,t)=\eta_0(t)\mathrm{sech}[\eta_0(t)(x+a(t))]\exp[i\theta_2(x,t)] \end{cases} \tag{21}$$

(20) 式代入(13) 及(18) 式，并注意到指数缓慢变化，即 $\theta_i(x,t)$ 随 x 的变化特征长度大于波包宽度，这时 $\theta_k(x,t)$ 可以从积分号中提出，而且含 $(\partial\theta_k/\partial x)$ 的项可以忽略，考虑孤子相差 $\varphi\equiv\theta_2(x,t)-\theta_1(x,t)\approx\theta_2(0,t)-\theta(0,t)\approx\pi$ 或 0 的情况，于是

$$\frac{d^2\bar{x}_1}{dt^2}=\frac{6\times16\times2}{N_1}\eta_0^4\cos\varphi\, e^{-2\eta_0 a}[C+D/2+E/3+4A\eta_0 a] \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} &A=\alpha(\alpha+1)/(1-\alpha)^4,\quad C=-\alpha(\alpha+1)/(1-\alpha)^3 \\ &D=(1-3\alpha)/(1-\alpha)^2,\quad E=-2/(1-\alpha),\quad \alpha=e^{-4\eta_0 a} \\ &N_1=N_2\approx N/2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|u_1+u_2|^2dx\approx2\eta_0+16\eta_0^2\cos\varphi a e^{-2\eta_0 a}/(1-e^{-2\eta_0 a}) \\ &\bar{x}_1=\frac{1}{N_1}\int_{-\infty}^{+\infty}xu_1u_1^*\,dx\approx a(t) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(21) 式中即为两孤子相互作用的牛顿方程. 该式右端代表双孤子间的相互作用力随相对间距 $2a(t)$ 的依赖关系，当 $2a$ 较大时，$\eta_0(t) \approx \eta_\infty = N/4$，可取 $\eta_0(t) \approx 1$，这时 $N_1 \to 2\eta_0$，$E \to -2$，$A \to 0$，$C \to 0$，$D \to 1$，(21) 式化为

$$\frac{d^2a(t)}{dt^2} = -16\eta_0^3 \cos\varphi \,\mathrm{xp}[-2\eta_0 a] \tag{23}$$

(20) 式中孤子的 $3dB$ 宽度为 $2x_D = (1.76/\eta_0)$，当 $2a = 0.65(2x_D)$ 时 $\alpha = 0.1$，因此，两孤子间距即使减小到0.65孤子宽度，$\alpha \to 0$的近似只引起大约10%的误差，也就是说，(23) 式能在较大范围内适用. 当 $\alpha \to 0$ 时，$\eta_0(t)$ 及 $\varphi(x,t)$ 将有较大的变化，(20) 式也不再适应对非线性薛定锷方程解的描写.

4 同相与反相孤子的相互作用

4.1 对于初相差 $\varphi(x,t) = 0$ 的同相孤子对

(23) 式变成

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -16\eta_0^3 e^{-2\eta_0 a} \tag{24}$$

令 $a'(t) = P(a)$，$a''(t) = p \cdot p'(a)$ 代入上式可得解出

$$a(t) - a(0) = (1/\eta_0)\ln|\cos(4\eta_0^2 e^{-\eta_0 a(0)} t)| \tag{25}$$

这代表了同相孤子相互作用的周期性合并，周期为

$$T = (\pi/4\eta_0^2)e^{\eta_0 a(0)} \tag{26}$$

从相同距 $a(0)$ 到 $a(t) = 0$ 所用时间为

$$\tau = (1/4\eta_0^2)e^{\eta_0 a(0)}\arccos(e^{-\eta_0 a(0)}) \tag{27}$$

它主要花费在 $2a$ 较大的漫长距离上.

4.2 对于初相差 $\varphi(x,0) = \pi$ 的反相孤子

(23) 式是

$$\frac{d^2a}{dt^2} = 16\eta_0^3 e^{-2\eta_0 a} \tag{28}$$

可解出 $a(t)$ 的演化规律

$$a(t) - a(0) = \frac{1}{\eta_0}\ln[\cosh(4\eta_0^2 e^{-\eta_0 a(t)} t)] \tag{29}$$

这代表了反相孤子的一致远离地排斥.

如果对时间作变换 $t \to t/2$，则 $\partial^2/\partial t^2 \to 4\partial^2/\partial t^2$，于是(1) 式在 $\hat{V} = 0$ 时就与文献[8] 及文献[9] 中的非线性薛定锷方程完全一样，这时(23) 式也就与文献[8] 中的(11) 式完全一致. 而且，如果作代换 $\eta_0(t) \to 2\nu(t)$，则(25) 式和(29) 式就变换成文献[8] 中的文献(14) 和(17) 式. 也就是说，本文基于等价粒子理论所给出的结论与文献[8] 中基于微扰变分法和文献[9] 中基于逆散射法的结论完全一致，当然，这不是本文追求的目标，这只是说明了用等价粒子理论分析孤子相互作用的可行性，它可用于多孤子相互作用的分析，可使物理图象更加直观，也易被实验工作者接受，他们只需在牛顿力学框架中进行分析. 对于三孤子及多孤子相互作用的等价粒子分析，本文作者正在作深入在研究.

参 考 文 献

[1] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Soliton: an Intoroduction*. first cd, Cambridge, Cambridge University Press, 1989, p. 7;15

[2] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Interaction of Soliton in a collisonless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **15**(3): 240~245

[3] A. B. Aceves, J. V. Moloney, A. C. Newell, Theory of light-beam at nonlinear interface I —— Equivalent —partiele theory for single interface. *Phys. Rev.* (*A*), 1989, **39**(4): 1809~1827

[4] A. B. Aceves, J. V. Moloney, A. C. Newell, Theory of light-beam at nonlinear interface Ⅱ —— Multiple—particle and Multiple-interface extensions. *Phys. Rev.* (*A*), 1989, **39**(4): 1828~1840

[5] A. B. Aceves. J. V. Moloney, A. C. Newell, Reflection and transmission of self-focused channels at nonlinear dieleetric interfaces. *Opt. Lett.*, 1988, **13**(11): 1002~1004

[6] A. M. Kosevich, Particle and waves properties of solitons. *Physica D*, 1990, **41**: 253~261

[7] Y. Lai, H. A. Haus, Quantum theory of soliton in optical fibers. *Phys. Rev.* (*A*), 1989, **40**(2): 844~866

[8] D. Anderson, M. Lisk, Bandwidth limits due to mutual pulse interaction in optical soliton communication systems. *Opt. Lett.*, 1986, **11**(3): 174~176

[9] J. P. Gordon, Interaction forees among solitons in optieal fibers. *Opt. Lett.*, 1983, **8**(11): 596~598

Equivaleut-Particle Theory for Soliton and Optical Soliton Interaction

Chen Lnjun Liang Changhong Wu Hongshi

(*Electromagnetical Field Engineering Department, Xidian University*, *Xi' an* 710071)

(Received 20 September 1992; revised 18 March 1993)

Abstract A generalized equivalent-particle theory for the the solitons governed by the nonlinear Schrodinger equatinon, with an operator-perturbation term included, is proposed, which can make understanding of the particle properties of solitons. As a parturbation method, it is able to deal with a wide kinds of problems, such as loss and gain in optical fiber, the effect of Raman induced scattering and higher order diapersions. The soliton interaction in optical fiber is analyzed by this method and the conclusions which are strictly in keeping with the results obtained by the inverse scattering technique and the variational perturbation theory are achieved. By using this method, the interaction of multi-soliton can be analytically analyized, and gives a visual picture of the physical process.

Key words soliton, soliton interaction, perturbation theory