

渐变折射率光波导的精确分析*

曹庄琪 詹黎 陈英礼

(上海交通大学应用物理系, 上海 200030)

摘 要 本文利用转移矩阵理论和等效衰减系数的概念, 导出了渐变折射率光波导的色散方程, 数值计算的结果表明, 该方程的精度优于目前存在的所有近似方法.

关键词 渐变折射率, 光波导, 等效衰减系数.

1 引 言

渐变折射率光波导的研究是光电子学的重要内容, 这类波导中光的传输特性可通过求解麦克斯韦方程和相应的边界条件而得到. 但是, 仅对有限的几种折射率分布可得到严格的解析解, 大多数折射率分布需籍助于数值或近似法求解. 作者在文献[1]中把渐变折射率光波导看成是一个多层膜结构, 利用转移矩阵理论和等效衰减系数的概念, 得到了精度优于 WKB 近似结果. 但上述等效衰减系数的概念并不完善, 它没有包含转折点外衰减波层间反射, 在本文中修正了等效衰减系数的定义, 因而大大提高了所得色散方程的精度, 通过数值比较可以看出, 建立的公式不仅适用于任意的折射率分布, 而且其精度优于目前存在的所有近似方法.

2 理论分析

考虑图 1 所示的任意折射率分布平板波导, 其中 n_0 、 n_2 分别为波导覆盖层和衬底的折射率, n_1 为波导表面的折射率, x_t 为转折点处的坐标, 假设坐标 $x_c = x_t + x_s$ 处的场足够小, x_c 右边折射率的变化对光导波传输特性的影响可忽略不计. 由于渐变折射率光波导实际上可看成折射率渐变的多层膜结构, 因此, 可利用转移矩阵理论求解. 首先把 $(0, x_t)$ 和 (x_t, x_s) 分别分成为 l 和 m 等分, 每一小区域的厚度为 h , 即有 $x_t = lh$, $x_s = mh$, 则

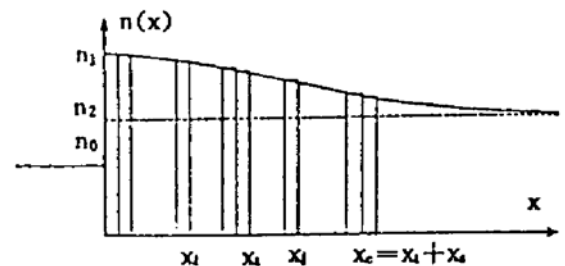


Fig. 1 Plot of planar waveguide with arbitrary refractive index profile

* 本课题得到国家自然科学基金资助.

收稿日期: 1993 年 11 月 3 日; 收到修改稿日期: 1994 年 2 月 28 日

对 TE 模, 相应于第 i 和第 j 个小区域的转移矩阵分别为^[2]

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos(k_i h) & -\sin(k_i h)/k_i \\ k_i \sin(k_i h) & \cos(k_i h) \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, l), \quad (1)$$

$$M_j = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(\alpha_j h) & -\operatorname{sh}(\alpha_j h)/\alpha_j \\ -\alpha_j \operatorname{sh}(\alpha_j h) & \operatorname{ch}(\alpha_j h) \end{bmatrix}, \quad (j = l+1, l+2, \dots, l+m), \quad (2)$$

$$K_i = (k_0 n_i^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad \alpha_j = (\beta^2 - k_0^2 n_j^2)^{1/2}$$

式中 β 为光导波纵向传播常数, 对转折点, 应有 $\beta = k_0 n(x_i)$, $k_0 = 2\pi/\lambda$ 为自由空间的波数, λ 为真空光波长. 利用 $x = 0$, $x = x_i$ 和 $x = x_c$ 处的边界条件, 可得以下矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} E_y(0) \\ E'_y(0) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^l M_i \begin{bmatrix} E_y(x_i) \\ E'_y(x_i) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_y(x_i) \\ E'_y(x_i) \end{bmatrix} = \prod_{j=i+1}^{l+m} M_j \begin{bmatrix} E_y(x_c) \\ E'_y(x_c) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 $E_y(x)$ 为 TE 模的电场分布, 一撇表示对 x 的导数. 显然, 在 $x < 0$ 区域是指数衰减函数, 而在 $x > x_i$ 区域虽然场也是衰减的, 但以何种形式衰减, 却与具体的折射率分布有关. 本文用一等效的指数衰减场来近似转折点外的实际衰减场, 而等效衰减系数由方程(3)确定. 为求解方程(3)设

$$E_y(x) = \begin{cases} A_0 \exp(P_0 x) & (x < 0) \\ A_i \exp[-P_i(x - x_i)] & (x_i < x < x_c) \end{cases} \quad (4)$$

$$P_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \quad (5)$$

A_0 、 A_i 为待定系数, 而 P_i 即为等效衰减系数. 由(4)式, 则(3)式变为

$$(-P_0 \quad 1) M_1 M_2 \cdots M_l \begin{bmatrix} 1 \\ -P_i \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

利用矩阵(1)化简方程(6), 可得如下色散方程:

$$\operatorname{tg}(k_i h) = \frac{P_0 + P_2}{k_i [1 - (P_0 P_2 / k_i^2)]} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} P_i &= k_i \operatorname{tg} [\operatorname{tg}^{-1}(P_{i+1}/k_i) - k_i h], \quad (i = 2, 3, \dots, l) \\ P_{i+1} &= P_i. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

以下需要做的工作是确定等效衰减系数 P_i . 由于前面假设 x_c 右边的折射率变化可忽略不计, 则可用一恒定的折射率 $n(x_c)$ 近似, 于是, 该区域的场是指数衰减型的, 可写为

$$E_y(x) = A_c \exp[-P_c(x - x_c)] \quad (x > x_c) \quad (9)$$

$$P_c = [\beta^2 - k_0^2 n^2(x_c)] \quad (10)$$

A_c 为待定系数, 再由(3)式可得方程

$$(P_i \quad 1) M_{l+1} M_{l+2} \cdots M_{l+m} \begin{bmatrix} 1 \\ -P_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

利用矩阵(1)化简方程(11), 则可得确定 P_i 的公式

$$\operatorname{th}(\alpha_{i+1} h) = \frac{P_i - P_{i+2}}{\alpha_{i+1} [1 - (P_i P_{i+2} / \alpha_{i+1}^2)]} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} P_j &= \alpha_j \operatorname{th} [\operatorname{th}^{-1}(P_{j+1}/\alpha_j) + \alpha_j h], \quad (j = l+1, l+3, \dots, l+m) \\ P_{l+m+1} &= P_c. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

最后需要解决的问题是如何确定坐标 x_c , 因为只有确定了 x_c , 才可由(14)式得到 P_c , 从而根据

(12)、(13)式得到 P_i . 显然, 转折点 x_i 是由波导的结构参数决定的, 而从 x_i 到 x_c 的长度 x_s 如何确定才能保证色散方程的精度呢? 原则上 x_s 越大则精度应越高, 但化费的计算机时间也越长, 而且 x_s 的任意选取也将带来理论的随意性. 这里取厚度 x_s 等于等效衰减场的穿透深度 $1/P_i$ 的整数倍, 即取

$$x_s = s/P_i \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

而 s 的大小取决于所需的计算精度. 根据计算结果可知, 取 $s = 2$ 时便可获得极佳的效果.

概括地说, 方程(10)、(12)、(13)、(14)是确定等效衰减系数 P_i 的方程有了 P_i , 则可由方程(7)和(8)确定任意折射率分布平板波导的传输特性.

3 数值分析与比较

为了检验本文所导出的色散方程的精确度, 考虑以下三种典型的折射率分布.

$$\text{指数分布:} \quad n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) \exp(-x/d) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{高斯分布:} \quad n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) \exp(-x^2/d^2) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{余误差分布:} \quad n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2) \operatorname{erfc}(x/d) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (17)$$

定义归一化参数:

$$\Gamma = k_0 d (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}, \quad b = \frac{n_c^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}, \quad n_c = \beta/k_0. \quad (18)$$

并选取 $n_0 = 1.0$, $n_2 = 2.177$ 和 $n_1^2 - n_2^2 = 0.187$, d 作为 v 变化的参数, 由本文公式计算得到的 b 值与精确值、WKB近似、爱里函数(AF)方法^[3]、余弦指数(CE)方法^[4]以及厄密高斯(HG)近似^[5], 比较的结果分别列于表1、表2和表3, 由表1可以看出, 对指数分布, 当取 $s = 1$ 时, 本文公式的精度就远高于WKB近似, 尤其在小的 Γ 值范围, 即接近截止时, 本文公式仍能达到很高的精度, 而WKB法对接近截止时的解是不适用的. 若取 $s = 2$, 则所得数据的精度显然都高于目前存在的精度最高的爱里函数(AF)方法^[3]. 另外, 爱里函数方法对指数分布是成功的, 但对其他分布是否适用, 尚未得到验证.

Table 1. Exponential profile

Γ	b (TE ₀)				
	accurate solution	this paper ($S=1$)	($S=2$)	AF	WKB
1.5	0.035007	0.035010	0.035002	0.035017	0.037833
2.0	0.104954	0.105038	0.104951	0.105028	0.108613
2.5	0.171442	0.171606	0.171441	0.171520	0.175311
3.0	0.229188	0.229408	0.229189	0.229260	0.233076
3.5	0.278650	0.278907	0.278655	0.278717	0.282486
4.0	0.321179	0.321445	0.321182	0.321235	0.324927
5.0	0.390292	0.390588	0.390296	0.390366	0.393845
6.0	0.444075	0.444377	0.444080	0.444110	0.447436
7.0	0.487244	0.487544	0.487250	0.487272	0.490429
8.0	0.522776	0.523071	0.522782	0.522800	0.525803

Table 2. Gaussian profile

Γ	b (TE ₀)				
	accurate solution	this paper ($S=2$)	CE	HG	WKB
2.0	0.0817	0.0817	0.0785	0.0051	0.0104
3.0	0.2750	0.2750	0.2699	0.2163	0.2071
4.0	0.4133	0.4133	0.4079	0.3702	0.3629

Table 3. Complementary error profile

Γ	b (TE ₀)				
	accurate solution	this paper ($S=2$)	CE	HG	WKB
3.0	0.0675	0.0675	0.0642	0.0154	0.0282
4.0	0.1694	0.1694	0.1644	0.1211	0.1293

对高斯分布和余弦差分布, 在取四位有效数字情况下, 从表 2 和表 3 可以看出, 本文结果与精确解完全一致, 而 CE、FC 和 WKB 近似与精确解相比都有相当大的误差。

结 论 本文导出了任意折射率分布平板波导的色散方程, 据我们所知, 在所有的近似方法中, 本文推导的解析公式的精度是最高的, 且利用该公式在一个个计算机上短时间内便可得到结果。另外, 本文的结果可方便在推广到 TM 模的情况。

参 考 文 献

- [1] 曹庄琪, 非均匀平板波导的色散方程. 光学学报, 1994, 14(11): 1223~1226
- [2] Z. Q. Cao, C. Hu, G. I. Jin, Method of equivalent refractive indexes in multi-quantum-well waveguides with arbitrarily shaped base periods. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1991, 8(12): 2519~2522
- [3] I. C. Goyal, R. L. Gallawa, A. K. Ghatak, Methods of analyzing planar optical waveguides. *Opt. Lett.*, 1991, 16(1): 30~32
- [4] K. Mishra, A. Sharma, Analysis of single mode inhomogeneous planar waveguides. *J. Lightwave Technol.*, 1986, LT-4(2): 201~204
- [5] S. K. Korotky, W. J. Minford, L. L. Buhl *et al.*, Modes size and method for estimating the propagation constant of single-mode Ti:LiNbO₃ strip waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1982, QE-18(10): 1796~1801

An Accurate Analysis of Graded Index Optical Waveguides

Cao Zhuangqi Zhan Li Chen Yingli

(Department of Applied Physics, Shanghai Jiaotong University, 200030)

(Received 13 November 1993; revised 28 February 1994)

Abstract A dispersion equation for graded index waveguides has been developed based on the transfer-matrix technique and the concept of equivalent attenuated coefficient. A comparison with other approximations and the exact numerical results shows that our method is much more accurate than the existing methods.

Key words graded index optical waveguide, equivalent attenuated coefficient.