

移相干涉术的一种新算法:重叠四步平均法

朱日宏 陈进榜 王青 陈磊

(南京理工大学, 电光学院, 南京 210014)

摘 要 提出了一种能大大地减小由于移相器的位移误差而引起相位复原误差的新方法, 即重叠四步平均法(Overlapping Averaging 4-Frame (OAF) Algorithm). 给出了这种方法的相位复原精度与移相器的位移误差之间的关系式, 从关系式中可见, OAF 算法大大地减小由于移相器的位移误差而引起相位复原误差. 通过计算机模拟, 得到了各种算法的相位复原精度与移相器的位移误差之间的关系曲线, 分析可得, 重叠四步平均法算法比其它算法有更高精度.

关键词 移相干涉术, 移相器.

1 引 言

移相干涉术被广泛应用在光学元件的测试、全息干涉术和散斑计量等方面^[1,2]. 这种方法的精度受到机械震动、光强变化和气流等随机误差的影响, 而移相器的标定误差和非线性误差则会引入原理性的误差. 在所有的误差中, 它的影响是很大的. 目前减小移相器的位移误差有两种途径: 第一种途径是寻找一种对移相器的标定误差和非线性误差不敏感的算法, 如四步平均法(Avg. 4-frame)、Carre 法和 Carre 平均法等^[3,4]. 第二种是通过对移相器进行校正, 减小移相器的标定误差和非线性误差, 从而减小了移相器的位移误差的影响^[5]. 作者也曾做了相应的工作^[6]. 本文从第一种方法入手, 通过对移相干涉术的相位复原精度与移相器的位移误差的关系式分析, 提出了一种减小移相器的位移误差的算法即重叠四步平均法.

2 移相干涉术的基本方程

假设仅考虑出瞳面上的一点 (x_0, y_0) , 正弦型干涉图的光强分布可表为

$$I_i = a + b \cos [\Phi + \Psi_i] \quad (1)$$

式中 a 为背景光强, b 为干涉条纹的调制度, Φ 为被测相位分布, Ψ_i 参考相位位移. 假设在一个周期内等间隔采样 N 步, 可得到 N 组光强 I_i 值, 则相位位移 Ψ_i 可表示为

$$\Psi_i = 2\pi(i-1)/N, \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

对于移相干涉术, 按下列方法对一组测量的 I_i 值进行处理: 先对方程分别以 $\cos \Psi_i$ 和 $\sin \Psi_i$, 然后对之累加 i 次, 利用三角函数正交性推导可得被测相位 Φ 的计算公式

$$\tan \Phi = - \sum_{i=1}^N I_i \sin \Psi_i / \sum_{i=1}^N I_i \cos \Psi_i \quad (3)$$

(3)式即移相干涉术的基本方程, 如果取 $N=4$, 则方程(3)式即可表示为四步法(4-frame). 在(1)式中, 参考相位 Ψ_i 假设是预置精确的, 但是在实际中, 它与理论值之间总是有一个小的位移误差 δ_i , 实际值 Ψ_i 可写为

$$\Psi_i = \Psi_i + \delta_i \quad (4)$$

这种偏差有两种不同的起源: 1) 移相器标定误差, 也就是移相器步进的位移量(也可以用相位表示)标定不准确. 2) 移相器的非线性误差, 即是移相器驱动反射镜时, 参考相位与步进数之间的非线性的关系. 从方程(3)式和(4)式中, 可以推导出相位复原偏差 $\Delta\Phi$ 与移相器的位移差之间关系式^[7,8]:

$$\Delta\Phi = A - (C + AS)\cos 2\Phi + (S - AC)\sin 2\Phi \quad (5)$$

$$A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i, \quad C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i \cos 2\Psi_i, \quad S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i \sin 2\Psi_i \quad (6)$$

从(5)式中可以看出, 移相器的位移误差 δ 引起的相位复原偏差 $\Delta\Phi$ 是 2Φ 的准正弦函数关系.

3 重叠四步平均法

为了消除或减小 $\Delta\Phi$, 对误差公式(5)逐项分析, 第一项是常数项, 它与 (x, y) 无关, 最终通过最小二乘法消除, 第二项和第三项是以被测相位 Φ 两倍 2Φ 的正弦关系变化的. 因此, 可以利用三角函数每隔 π 幅值正负相反特性, 在移相器驱动参考相位步进时, 对干涉场的光强作多幅采样, 按(3)式取其中的 N 幅作由光强复原相位计算, 得到第一组光强值复原相位分布 Φ ; 然后按照上述过程递次重叠计算, 递次相位间隔为 $\pi/2$, 这样每次计算相位 Φ 值所引入的 $\Delta\Phi$ 幅值正负相反, 如果作偶次计算相位 Φ 值平均就能很好在消除或减小 $\Delta\Phi$, 这就是重叠平均法的基本原理.

四步法是一种简单而有效的由光强复原相位的方法, 而且它们的采样间隔是 $\pi/2$, 以这种方法为基础, 对干涉光强作采样间隔 $\pi/2$ 的 $2M+3$ 采样, 按照四步法计算公式(3)(取 $N=4$), 四场光强场为一个周期计算一个相位值, 递进到下一周期的计算相位增加 $\pi/2$. 其作 $2M$ 次渐进重叠计算, 得到 $2M$ 个 Φ_i 值, 再对它们求算术平均值就得所要求的相位值 Φ . 这样就能用 M 组 $\Delta\Phi$ 的正负抵消, 并随着 M 的增加, 消除误差的效果更好. 通常取 $M=4$, 就达到预期的效果, 这就是重叠四步平均法算法, 于是得参考相位 Ψ_{k+i} 为

$$\Psi_{k+i} = \pi(i-1)/2 + \delta_{k+i} + \pi(k-1)/2, \quad i = 1, \dots, 4, k = 1 + \dots, 2M \quad (7)$$

式中第一项表示四步理想的步进相位, 第二项表示移相器引入误差, 第三项表示渐进重叠计算相位时, 初始相位的增加值, k 是指渐进重叠计算相位的序数. 这样得干涉场光强 I_{k+i} 为

$$I_{k+i} = a + b \cos [\Phi_i + \Psi_{k+i}], \quad i = 1, \dots, 4, k = 1, \dots, 2M \quad (8)$$

式中 Φ_i 表示 k 次循环计算的相位值. 它可用下式计算

$$\Phi_i = \tan^{-1} \left[\frac{I_{k+3} - I_{k+1}}{I_{k+1} - I_{k+2}} \right] \quad (9)$$

则通过平均 $2M$ 次 Φ_i 可得到实际相位分布 $\bar{\Phi}$

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{2M} \tan^{-1} \left[\frac{I_{k+3} - I_{k+1}}{I_{k+1} - I_{k+2}} \right] \quad (10)$$

这就是重叠四步平均法的计算公式. 下面分析重叠四步平均法的相位复原精度与移相器的位移误差之间的关系式. 由方程(5)式可得, 第 k 次周期相位复原偏差 $\Delta\Phi_k$ 可表示为

$$\left. \begin{aligned} \Delta\Phi_k &= A_k - P_k^1 \cos [2\Phi + \pi(k-1)] + P_k^2 \sin [2\Phi + \pi(k-1)] \\ P_k^1 &= C_k + A_k S_k, \quad P_k^2 = S_k - A_k C_k \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在方程(11)中, A_k , C_k 和 S_k 由(6)式表示. 重叠四步平均法的相位复原偏差 $\Delta\bar{\Phi}$ 为

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\Phi} &= \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^{2M} \Delta\Phi_k \\ &= \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^{2M} A_k - \frac{1}{2M} \left(\sum_{k=1}^M P_{2k}^1 - \sum_{k=1}^M P_{2k+1}^1 \right) \cos 2\Phi + \frac{1}{2M} \left(\sum_{k=1}^M P_{2k}^2 - \sum_{k=1}^M P_{2k+1}^2 \right) \sin 2\Phi \end{aligned} \quad (12)$$

式中第一项是相位复原偏差的平均值是一个常数项(即不随 x, y 坐标而变化), 可以用最小二乘法消除; 第二项和第三项是 2Φ 的正弦和余弦函数, 它们的振幅由于 $2M$ 周期的平均而大大减小. 因此, 重叠四步平均法可以大大地减小由于移相器的位移误差而引起相位复原偏差.

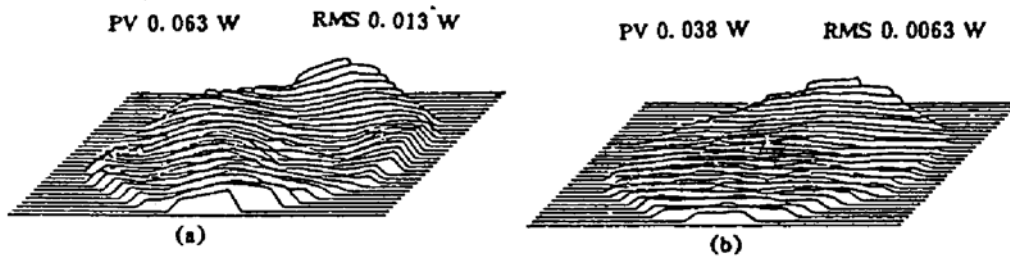


Fig. 1 The Phase distribution

(a) The first measurement phase calculated by 4-bucket

(b) The phase calculated by the OAF

对于有极小面形误差的被测平面, 用自行研制的孔径 $\phi 245$ mm 的数字平面干涉仪分别用四步法、四次重叠四步平均法 ($M=4$) 对同一被测对象在移相器标定误和非线性误差相同的条件下进行测试, 结果如图 1 所示: 图 1(a) 是对应四步法对 1 至 4 幅干涉图光强计算的相位分布三维立体图, 图中可见由于移相器的位移误差所引起的相位的起伏很明显; 图 1(b) 是对应用四次重叠四步平均法 ($M=4$) 对 1 至 8 次循环计算的相位分布三维立体图, 图中可见由于移相器的位移误差所引起的相位的起伏基本消除.

4 移相干涉术算法的比较

为了消除移相器的标定误差, 提出 Carre 算法, 它要求每次采样的参考相位位移等间隔, 不要求间隔的大小已知, 其相位计算的公式为

$$\Phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{[(I_1 - I_4) - (I_2 - I_3)][3(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)]}}{(I_2 + I_3) - (I_1 + I_4)} \quad (13)$$

显然, Carre 平均法与四步平均法的原理相同, 两次循环错位一幅干涉图.

4.1 移相器的误差

假设移相器只有标定误差, 则移相器的相位位移可表示为

$$\Psi_i = (2\pi/N)(i-1) + \zeta_1(i-1), \quad i = 1, \dots, P \quad (14)$$

式中 $P=2M+3$ 为总步进数, 对移相器的标定误差用百分数来表示, 即以相位表示的最大的

标定误差 δ , 和理想的相位位移的最大值之比的百分数 E_1 , 如图 2 所示.

$$E_1 = (\delta_p / \Psi_p) \times 100\% \tag{15}$$

假设移相器存在非线性误差, 则其相位位移可表示为

$$\Psi_i = (2\pi/N)(i - 1) + \zeta_2(i - 1)^2 \tag{16}$$

式中 ζ_2 为二次项系数, 非线性误差 E_n 可表示为

$$E_n = (\delta_{max} / \Psi_p) \times 100\% \tag{17}$$

式中 δ_{max} 为非线性位移曲线对于始点和终点所连直线的最偏差. 如图 3 所示.

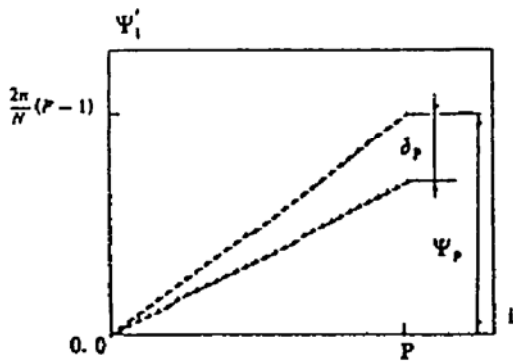


Fig. 2 Calibration error in phase shifter

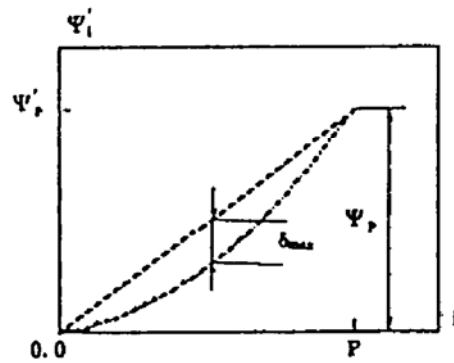


Fig. 3 Nonlinearity in phase shifter

4.2 计算机模拟

在计算机模拟时, 相位分布函数 Φ 由下式给出:

$$\Phi = M_r 2\pi x / N_r \tag{18}$$

式中 M_r 表示条纹数 ($M_r = 1$), N_r 表示总采样的点数 ($N_r = 256$). 给定移相器的标定误差 (E_1) 和非线性误差 (E_n), 按 (1) 式求得一组模拟的光强值, 按前述的各种相位计算的算法编制软件. 按图 4 所示算法比较框图, 分别对 11 种算法 4-步法、5 步法、7 步法和 8 步法、四步平均法、重叠二步平均法、重叠三步平均法、重叠四步平均法、Carre 法和 Carre 平均法进行了相位复原, 求得相位 Φ_c 用 $\Phi_c - \Phi_0$ 的峰谷值表征相位算误差.

$$\Delta\Phi = \Phi_c - \Phi_0 \tag{19}$$

在计算机模拟的过程中, 移相器的标定误差 E_1 范围在 50% 到 -50% 之间变化, 非线性误差 E_n 范围在 +30% 到 -30% 之间变化.

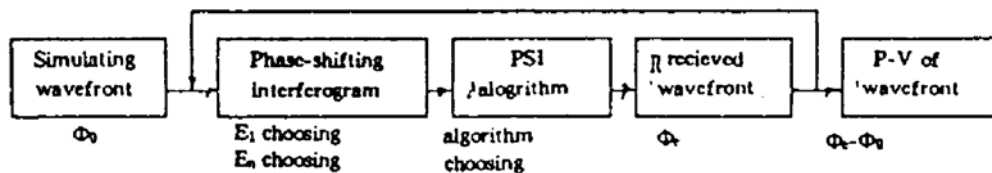
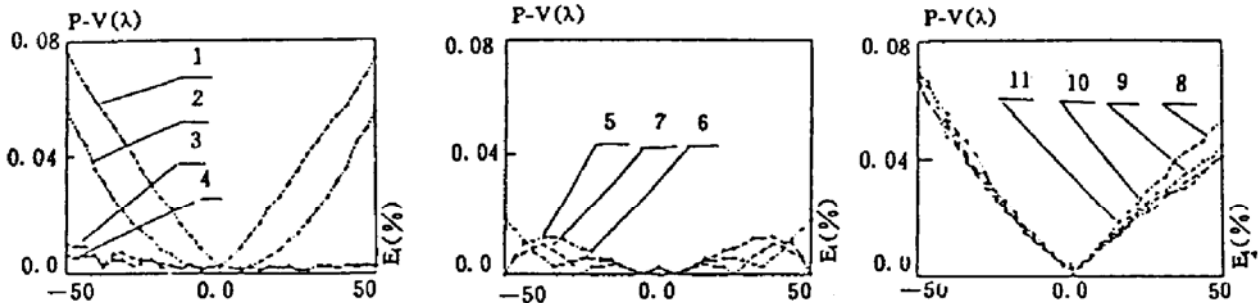


Fig. 4 Computer simulation chart for different algorithms

4.3 相位复原误差的峰谷值

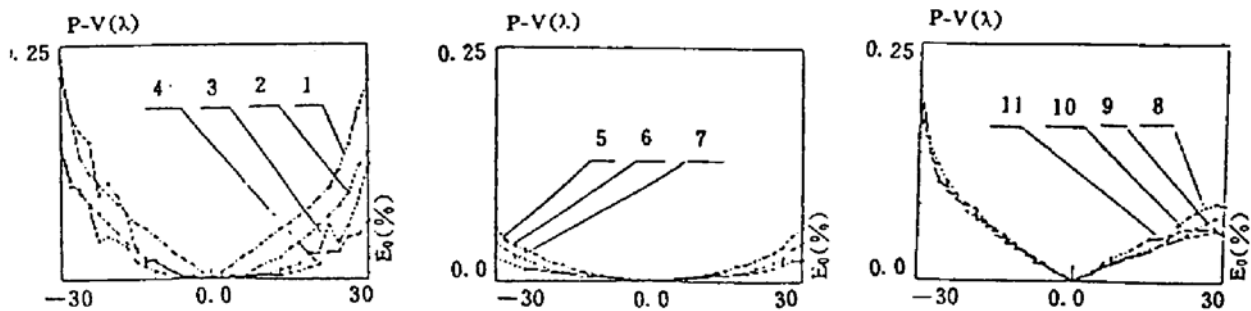
图 5 是 1 至 11 种算法的相位误差峰谷值与移相器的标定误差 E_1 所对应的关系曲线. 从图中可见, 在相同的标定误差 $|E_1|$ 的条件下, 对于 4-步法 5-步法、6 步法、7 步法和 8 步法、这类算法所对应的相位复原误差的峰谷值随着步进 N 的增多而明显的减小, 当移相器的标定误差增大时, 图中可见, 这类算法所对应的相应复原误差的峰谷值上升很快, 因此, 这类算法对移相器的标定误差很敏感, 在移相器的 标定误差 $|E_1| < 6\%$ 时, 这类算法所对应的本位复原误差的峰谷值小于 $\lambda/100$ (λ 是激光的波长); 在相同的标定误差 $|E_1|$ 的条件下, 对于

四步平均法、重叠 2、3、4 步平均法这类算法所对应的相位复原误差的峰谷值随着重叠次数 M 的增多而大大的减小, 当移相器的标定误差增大时, 图中可见, 这类算法所对应的相位复原误差的峰谷值上升很慢, 因此, 这类算法对移相器的标定误差不敏感, 在移相器的标定误差 $|E_1| < 12\%$ 时, 四步平均法所对应的相位复原误差的峰谷值小于 $\lambda/100$, 当移相器的标定误差增大时, 图中可见, Carre 法和 Carre 平均法所对相位复原误差的峰谷值略有减小, 在相同 $|E_1|$ 下, Carre 平均法的峰谷值比 Carre 法小. 因此, 这类算法对移相器标定误差不敏感.



1. 4-frame 2. Avg. 4-frame 3. Carré 4. Avg. Carré 5. 2-OAF 6. 3-OAF 7. 4-OAF 8. 5-frame 9. 6-frame 10. 7-frame 11. 8-frame
Fig. 5 Simulation results of miscalibration phase shifter error $|E_1|$ for all eleven algorithms with error $|E_1|$ amounts ranging from -50% to $+50\%$

图 6 是 1~11 种算法的相位复原误差峰谷值移相器的非线性误差 E_n 所对应的关系曲线. 从图中可见, 在相同的非线性误差 $|E_n|$ 的条件下, 对于四步法、五步法、六步法、七步法和八步法, 这类算法所对应的相位复原误差的峰谷值随着步数 N 的增多而明显地减小, 当移相器的非线性误差增大时, 图中可见, 这类算法所对应的相位复原误差的峰谷值上升很快, 因此, 这类算法对移相器的非线性误差很敏感, 在移相器的非线性误差 $|E_n| < 1\%$ 时, 这类算法所对应的相位复原误差的峰谷值小于 $\lambda/100$; 在相同的非线性误差 $|E_n|$ 的条件下, 对于四步平均法、重叠二步平均法、重叠三步平均法和重叠四步平均法这类算法所对应的相位复原误差的峰谷值随着重叠次数 M 的增多而明显的减小, 当移相器的非线性误差增大时, 图中可见, 重叠四步平均法所对应的相位复原误差的峰谷值变化较小, 因此, 重叠四步平均法对移相器的非线性误差不敏感, 四步平均法随着移相器的非线性误差增大, 对应的相位误差峰谷值上升很快, 在 $|E_n| < 3\%$ 时, 对应的相位复原误差的峰谷值小于 $\lambda/100$, 当移相器的非线性误差增大时, 图中可见, Carre 法和 Carre 平均法所对相位复原误差的峰谷值上升很快, 在相同 $|E_n|$ 下, Carre 平均法的峰谷值比 Carre 法略小, 因此, 这类算法对移相器非线性误差敏感.



1. 4-frame 2. Avg. 4-frame 3. Carré 4. Avg. Carré 5. 2-OAF 6. 3-OAF 7. 4-OAF 8. 5-frame 9. 6-frame 10. 7-frame 11. 8-frame
Fig. 6 Simulation results of nonlinear phase shifter error $|E_n|$ for all eleven algorithms with error $|E_n|$ amounts ranging from -30% to $+30\%$

结 论 综上所述, 重叠四步平均法最适宜于消除移相器的标定误差和非线性误差, 在移相器有较大的位移误差 ($|E_1| > 12\%$, $|E_n| > 3\%$) 情况下, 四次重叠四步平均法仍有较高查位复

原精度. Carre 法和 Carre 平均法适宜移相器的标定误差. 如果考虑到计算速度, 在移相器的标定误差 $|E_1| < 12\%$ 非线性误差 $|E_n| < 3\%$ 情况下, 四步平均法也是一个可取的算法. 在移相器的标定误差和非线性较小的情况下, 当 $|E_1| < 6\%$ 和 $|E_n| < 1\%$, 四步法也能获得好的结果.

参 考 文 献

- [1] K. Creath, Phase-measurement interferometry techniques. *Progress in Optics*, 26 edited by E. Wolf (Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1988) : 349~393
- [2] J. Schwider, Advanced evaluation technique in interferometry. *Progress in Optics* 29 (North Holland, 1990) : 271~359
- [3] C. Ai, J. C. Wuant, Effect of piezoelectric Transducer nonlinearity on phase shift interferometry. *Appl. Opt.*, 1987, 26(6) : 1112~1116
- [4] P. Carre, Installation et utilisation du comparateur photoelectrique et interferentiel du Bureau international des poids et mesures. *Metrologia*, 1966, (1) : 13~23
- [5] K. Kinastatter *et al.*, Accuracy of phase shifting interferometry. *Appl. Opt.*, 1988, 27(24) : 5982
- [6] Rihong Zhu, Jinbang Chen *et al.*, Accuracy of phase shifter calibration and error compensation. *Proc. SPIE*, 1991, 1553 : 702~710
- [7] J. Schwider, R. Burow, K. E. Elssner, *et al.*, Digital wavefront measuring interferometry; some systematic error sources. *Appl. Opt.*, 1983, 22(17) : 3421
- [8] J. Schwider, Phase shifting interferometry; reference phase error reduction. *Appl. Opt.*, 1989, 28(17) : 3889

A New Algorithm on Phase Shifting Interferometry —— The Overlapping Averaging 4-Frame Algorithm

Zhu Rihong Chen Jinbang Wang Qi Chen Lei

(Institute of Photoelectric Technology, Nanjing University of Science and Technology
Nanjing 210014)

(Received 16 November 1993; revised 6 February 1994)

Abstract This paper presents a new algorithm, the overlapping averaging 4-frame (OAF) algorithm, which can reduce the phase error caused by phase shifter error. The relationship between the accuracy of OAF algorithm and phase shifter errors is given. Based on this relationship, it is verified that the OAF algorithm can reduce the phase error from phase shifter error. The computer simulation has shown the magnitude of a calibration error and nonlinearity in the phase shifter for a number of different phase-measurement algorithms. It is indicated from the analysis that the OAF algorithm has higher accuracy than other phase-measurement algorithms.

Key words phase shifting interferometry, phase shifter.