

非均匀平板波导的色散方程

曹庄琪

(上海交通大学应用物理系, 上海 200030)

摘 要 利用转移矩阵理论分析了任意折射率分布平板波导的传输特性, 导出了非均匀平板波导的近似解析色散方程, 并指出了 WKB 近似的局限性. 数值比较的结果表明, 文中所得公式的精确度优于传统的 WKB 方法和其它近似方法.

关键词 平板波导, 色散方程.

1 引 言

在集成光学和微电子器件等领域中, 任意折射率分布平板波导的分析是一个极为重要的课题. 到目前为止, 只有有限的几种折射率分布, 譬如, 指数分布^[1]、双曲函数分布^[2]等, 可精确求解麦克斯韦标量波动方程, 绝大多数非均匀平板波导只能用数值法或近似法求解. WKB 近似法由于其简单的解析公式和清晰的物理意义而获得广泛的应用. 但它只适用于多模情况, 对于接近于截止的模式或单模波导, WKB 近似不再有效^[3]. 对微扰法, 只有当所研究的折射率分布与有精确解的折射率分布接近时, 才有较高的精确度^[4]. 还有余弦法指数近似(CE)^[5]和厄密高斯近似(HG)^[6], 但这些方法对精确度来说, 远不是成功的. 另有一些近似方法^[7~9], 它仅适用于某一种特定的折射率分布.

本文首先把非均匀平板波导分为一系列折射率连续变化的薄膜, 然后应用简单的 2×2 转移矩阵和相应的边界条件, 导出了适用于任意折射率分布平板波导的解析色散方程. 该方程的形式与三层平板波导简单的本征方程完全一致. 对于转折点处的模场, 文中首次提出了平均衰减系数的概念, 并得到了相应的公式. 利用本文得到的解析公式, 在一个微机上, 短时间内便可算出波导的传播常数. 并以指数和高斯折射率分布为例, 与 WKB 等近似方法进行了数值比较, 证明得到的公式与精确结果符合得很好.

2 分析结果

考虑图 1 所示的任意折射率分布平板波导, 其中 n_0 、 n_2 分别为波导覆盖层和衬底的折射率, n_1 为波导表面折射率. x_i 为转折点处的坐标. 为了利用转移矩阵求解, 可把 x_i 分为 l 等份, 每一小区域的厚度为 h , 即 $x_i = lh$. 则对 TE 模, 相应于第 j 个小区域的转移矩阵为^[10].

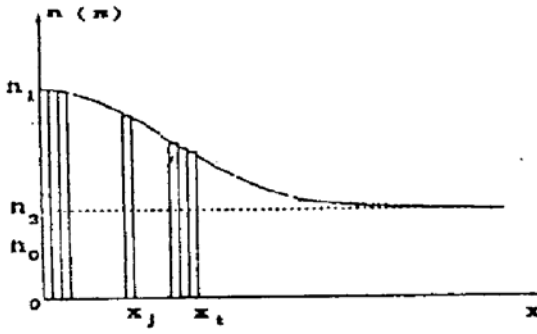


Fig. 1 Plot of a planar waveguide with arbitrary refractive index profile

$$M_j = \begin{bmatrix} \cos K_j h & -\frac{1}{K_j} \sin K_j h \\ K_j \sin K_j h & \cos K_j h \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, l) \quad (1)$$

$$K_j = (k_0^2 n_j^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (2)$$

式中 K_j 为横向传播常数, β 是光波导波沿传输方向的传播常数; $k_0 = 2\pi/\lambda$ 为自由空间的波数, λ 为光波长. 利用 $x = 0$ 和 x_t 处的边界条件, 可得到以下矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} E_y(0) \\ -E_y'(0) \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^l M_j \begin{bmatrix} E_y(x_t) \\ E_y'(x_t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 $E_y(x)$ 为 TE 模的电场分布, $E_y'(x)$ 表示对 x 求导. 设 $E_y(x)$ 在 $x < 0$ 和 $x > x_t$ 区域的场分布为

$$E_y(x) = \begin{cases} A_0 \exp(P_0 x) & (x < 0) \\ A_{l+1} \exp[-P_{l+1}(x - x_t)] & (x > x_t) \end{cases} \quad (4)$$

$$P_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \quad (5)$$

式中 A_0, A_{l+1} 为待定系数. 由于转折点外的场必定是衰减的, 但并非一定是指数衰减. 我们的思想是用一指数衰场来近似转折点外的实际衰场. 而等效衰减系数 P_{l+1} 可由下式定义:

$$P_{l+1} = \frac{1}{1/P_{l+1}} \int_{x_t}^{x_t + 1/P_{l+1}} \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n^2(x)} dx \quad (6)$$

上式的意义是: 在 $1/P_{l+1}$ 长度上衰减系数的平均值. 由(6)式可直接得到

$$\int_{x_t}^{x_t + 1/P_{l+1}} \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n^2(x)} dx = 1 \quad (7)$$

并化简可得以下色散关系:

$$K_1 h = m\pi + \text{tg}^{-1}(P_0/K_1) + \text{tg}^{-1}(P_2/K_1) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

$$P_j = K_j \text{tg} [\text{tg}^{-1}(P_{j+1}/K_j) - K_j h] \quad (j = 2, 3, \dots, l) \quad (9)$$

根据(7)、(8)、(9)式, 只要知道 $n(x)$, 则可完全确定图 1 所示非均匀平板波导的传输特性, 这也说明方程(7)、(8)、(9)式是普适的公式. 对 TM 模, 可用完全类似的步骤分析.

3 讨 论

为了看清方程(8)、(9)的意义, 考虑图 2 所示的四层平板波导. 由(8)和(9)两式, 四层平板波导严格的色散方程由下式表示

$$K_1 h_1 = m\pi + \text{tg}^{-1}(P_0/K_1) + \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{K_2}{K_1} \text{tg} [\text{tg}^{-1}(P_3/K_2) - K_2 h_2] \right\}, \quad (10)$$

$$K_1 = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad K_2 = (k_0^2 n_2^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad P_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}, \quad P_3 = (\beta^2 - k_0^2 n_3^2)^{1/2} \quad (11)$$

显然, 在 $(n_1 - n_2)/n_1 \ll 1$ 时, 有 $(K_1 - K_2)/K_1 \ll 1$. 这时, 如果忽略(10)式最右边一项中弧号内正切函数的系数 K_2/K_1 与 1 的差别, 则有 $K_2/K_1 \approx 1$, 即忽略在界面 $x = h_1$ 处的反射, 则由(10)式, 可得

$$K_1 h_1 + K_2 h_2 \approx m\pi + \text{tg}^{-1}(P_0/K_1) + \text{tg}^{-1}(P_3/K_2) \quad (12)$$

当层数增加到 l 层时, 若作类似于(12)式的近似, 则由(8)、(9)两式可得

$$\sum_{j=1}^l K_j h_j = m\pi + \text{tg}^{-1}(P_0/K_1) + \text{tg}^{-1}(P_{l+1}/K_l) \quad (13)$$

当折射率连续变化、并存在转折点 x_i 时，用最靠近转折点处一点的衰减系数 P_{i+1} 代替转折点外整个区域的衰减系数，即 $\text{tg}^{-1}(P_{i+1}/K_i) = \pi/4$ ，于是(13)式还原为 WKB 近似的色散方程：

$$\int_0^{x_i} K(x)dx = m\pi + \pi/4 + \text{tg}^{-1}(P_0/K_1) \quad (14)$$

以上分析指出了 WKB 近似的局限所在，同时表明，本文所导出的(8)式和(9)式是严格的，是考虑了层间反射的结果。本文的近似之外是采用了平均衰减系数的概念。

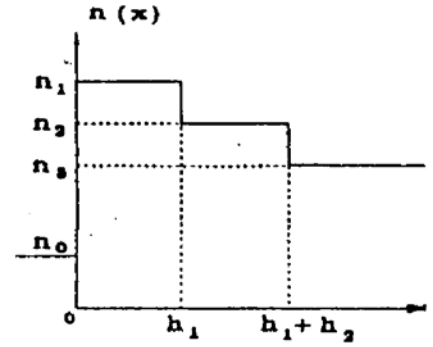


Fig. 2 Plot of a four layered waveguide

4 数值结果与比较

为了验证本文所导出公式的精确性，考虑以下两种折射率分布。

1) 指数分布：
$$n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)\exp(-x/d) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (15)$$

2) 高斯分布：
$$n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)\exp(-x^2/d^2) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (16)$$

选取 $n_0=1.0$, $n_2=2.177$ 和 $n_1^2-n_2^2=0.187$, d 作为 V 变化的参数。由公式(7)、(8)和(9)式计算得到的 b 值以及与精确值、WKB 等近似比较的结果分别列于表 1 和表 2。由表 1 可以看出，对指数分布，在大的 V 变化范围内，本文所得到的 b 值的精确度均高于 WKB 近似，误差不到 WKB 近似法的 1/2。对表 2 的高斯分布，本文公式的精确度不仅高于 WKB 近似，而且还优于余弦指数、厄密高斯等近似方法。另外，对于小的 V 值(单模或少模情况)，厄密高斯近似与 WKB 近似引起的相对误差变得非常大，而本文所得结果与精确值仍符合得相当好。

Table 1 Exponential profile

V	accurate solution	this paper		WKB	
	b	b	$\Delta b \times 10^{-3}$	b	$\Delta b \times 10^{-3}$
1.5	0.035007	0.034251	-0.76	0.037833	2.83
2.0	0.104954	0.103507	-1.45	0.108613	3.66
2.5	0.171442	0.169746	-1.70	0.175311	3.87
3.0	0.229188	0.227423	-1.77	0.233076	3.89
3.5	0.278650	0.276866	-1.78	0.282486	3.84
4.0	0.321179	0.319420	-1.76	0.324927	3.75
5.0	0.390292	0.388602	-1.69	0.393845	3.55
6.0	0.444075	0.442480	-1.60	0.447436	3.36
7.0	0.487244	0.485733	-1.51	0.490429	3.19
8.0	0.522776	0.521331	-1.45	0.525803	3.03

Table 2 Gaussian profile

Γ	accurate solution	this paper	CE	HG	WKB
2.0	0.0817	0.0800	0.0785	0.0051	0.0453
3.0	0.2750	0.2715	0.2699	0.2163	0.2538
4.0	0.4133	0.4102	0.4079	0.3702	0.4008

结 论 对于任意折射率分布的非均匀平板波导, 本文在转折点内采用了多层薄膜近似, 在转折点外, 首先提出了平均衰减系数的概念, 用以克服 WKB 近似的局限性, 并导出了简明的、容易计算的解析色散方程. 通过数值比较, 表明本文得到的公式具有相当高的精确度.

参 考 文 献

- [1] E. M. Conwell, Modes in optical waveguides formed by diffusion. *Appl. Phys. Lett.*, 1973, **23**(6): 328~329
- [2] A. K. Ghatak, L. A. Kraus, Propagation of waves in a medium varying transverse to the direction of propagation. *IEEE Quant. Electron.*, 1974, **QE-10**(4): 465~467
- [3] M. J. Adams, The claded parabolic index profile waveguide; analysis and application to strip-geometry lasers. *Opt. & Quantum Electron.*, 1978, **10**(1): 17~29
- [4] A. Kumar, K. Thyagarajan, A. K. Ghatak, Modes in inhomogeneous slab waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1974, **QE-10**(2): 902~904
- [5] P. K. Mishra, A. Sharma, Analysis of single mode inhomogeneous iplanar waveguides. *J. Lightwave Technol.*, 1986, **LT-4**(2): 204~211
- [6] S. K. Korotky, W. J. Minford, L. L. Buhl *et al.*, Modes size and method for estimating the propagation constant of single-mode Ti: LiNbO₃ strip waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1982, **QE-18**(10): 1796~1801
- [7] 叶培大, 吴彝尊, 光波导技术理论基础. 北京, 人民邮电出版社, 1981: 106
- [8] 范俊清, 二次多项式折射率分布平面光波导的模式. *光学学报*, 1989, **9**(2): 135~139
- [9] I. C. Goyal, R. L. Gallawa, A. K. Ghatak, Methods of analyzing planar optical waveguides. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(1): 30~32
- [10] Z. Q. Cao, C. Hu, G. L. Jin, Method of equivalent refractive indices in multi-quantum-well waveguides with arbitrarily shaped base periods. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1991, **8**(12): 2519~2522

Dispersion Equations of Inhomogeneous Planar Optical Waveguides

Cao Zhuangqi

(Department of Applied Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

(Received 9 June 1993; revised 9 August 1993)

Abstract A new method for obtaining the analytical dispersion characteristics of planar waveguides with arbitrary refractive index profile is presented. The method is based on the transfer matrix theory and a new interpretation of the WKB approximation is proposed. A comparison with other methods and the exact numerical results shows that our method is much more accurate than the ordinary WKB method and other existing approximate methods.

Key words planar optical waveguide, dispersion equation.