

# 联合变换实现子波变换的理论分析

王文陆 金国藩 严瑛白 郭敏贤

(清华大学精仪系, 北京 100084)

**摘 要** 首次提出用联合变换相关的概念, 把 Haar 子波和 Roberts 滤波器分别与目标图像一起作为联合图像, 实现对目标图像的子波变换, 提取出目标的角、边及边沿增强等特征. 并设计了一套由计算机控制的光学联合子波变换系统, 可实现对目标“真实”的光学子波变换. 还给出了数值模拟结果.

**关键词** 子波变换, 联合变换相关器.

## 1 引 言

子波变换理论是近年发展起来的一个新的数学分支. 由于其数学上的精巧和比较容易计算, 在信号分析中非常有用, 已经成为国际上极为活跃的研究方向, 已被广泛应用于图像处理、语音人工合成、地震波探测和分析、石油勘探、数据压缩和恢复等领域<sup>[1]</sup>. 子波变换是通过对一个原型函数(mother wavelet)进行“扩”(dilation)和“平移”(translation)产生一系列完备正交的子波函数(daughter wavelet)作为基函数对信号进行变换, 可以在不同层次上反映信号的局部特征<sup>[2]</sup>. 也就是说, 可以对信号进行多尺度或多分辨率(multiresolution)分析: 由较大的扩因子得到信号的低频特性, 由较小的扩因子信号被分解在更详细的水平上, 信号的不连续性变得明显. 这种对信号的多重分辨率或多重尺度分析就是子波变换的关键所在. 子波变换的原始概念是由法国地质学家 Morlet 和 Grossman 在 70 年代分析地质数据时引进的, 后经许多科学家的努力, 子波变换已经有了比较系统的理论和计算方法, 并在许多领域中发挥作用.

由于在信号子波变换中存在着坐标加倍<sup>[3]</sup>的问题, 所以用数字电子处理器来进行子波变换其计算复杂, 也比较费时. 众所周知, 光学技术中的并行处理和三维任意互联的优点, 及透镜的傅里叶变换特性, 用光学技术来实现子波变换最近引起了人们的重视. 对信号子波变换实际上就是对信号进行一系列的带通滤波操作<sup>[2]</sup>, 这可由光学  $4f$  系统来实现. 光学  $4f$  系统实际上就是一个匹配滤波系统, 在作子波变换处理时, 只要在系统的匹配滤波平面上放置一系列具有不同扩因子的带通滤波器, 就可以得到信号在不同分辨率上的特征. 但是, 光学  $4f$  系统在匹配滤波过程中存在着制作复空间滤波器和对滤波器的准确复位的困难, 因此在六十年代由 Weaver 和 Goodman<sup>[4]</sup> 最早提出了光学联合变换相关器(Joint Transform Correlator—JTC), 用来实现两个函数的光学相关. 这样既省去了制作复数滤波器的必要性,

也克服了对滤波器精确复位的要求. 然后, 对联合变换相关器的各方面, 比如: 提高其光学衍射效率, 平移不变性、旋转不变性模式识别, 利用空间光调制器实现实时的光学模式识别<sup>[5,6,9]</sup>等许多方面都作了比较深入的研究, 也是目前光学信息处理领域中极为活跃的研究方向.

本文首次提出了用联合变换相关的概念, 来实现光学子波变换, 把待处理的图像和子波函数作为联合图像放在联合变换相关器的输入面, 它们的频谱用平方率探测器件接收, 然后用平行光去读出联合变换功率谱, 再经反傅氏变换, 在输出面就可得到对目标图像的准子波变换操作, 提取出目标图像的特征. 设计的系统由计算机控制, 子波函数可以实时生成, 目标图像可由摄像机输入, 相关输出经计算机按子波变换的要求进行处理, 这样可以得到“真正”的光学子波变换. 文中讨论了 Haar 子波和 Roberts 滤波器的关系, 由数值模拟结果加以验证, 并对结果进行了讨论.

## 2 理论描述

### 2.1 子波变换

把满足条件:

$$\int |H(f)|^2 |f|^{-1} df < \infty \quad (1)$$

的平方可积函数  $h(t)$  [即  $h(t) \in L^2(R)$ ,  $H(f)$  是  $h(t)$  的傅里叶变换] 称为一个原型函数或子波母函数. 令:

$$h_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in R, a \neq 0 \quad (2)$$

称为由母函数  $h(t)$  经“扩”(由参数  $a$  表示)和“平移”(由参数  $b$  表示)生成的依赖于参数  $a$ 、 $b$  的连续子波核函数. 由子波母函数的条件(1)式可知, 子波函数一定是振荡型的函数, 在时间域或空间域的积分面积为零. 由(2)式可知, 子波核函数  $h_{a,b}(t)$  与子波母函数  $h(t)$  的形状一致, 随窗口参数  $a$  的增大而拉伸, 可以分析信号的低频特性; 随窗口参数  $a$  的缩小而收缩,  $h_{a,b}(t)$  的频谱就愈集中于高频部分, 可以分析信号的高频特性. 这就满足了在信号处理中所要求的信号频率愈高相应的窗口就小, 因而在时间域(或空间域)上的分辨率亦愈高的要求. 并且核函数随平移参数的改变而在时间轴或空间轴上处于不同的位置, 可以分析信号到达的时间和位置特性. 对于信号  $s(t)$  的子波变换在 Hilbert 空间上的定义为:<sup>[2]</sup>

$$W_s(a,b) = \langle h_{a,b}, s \rangle = \int h_{a,b}^*(t) s(t) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int h^*\left(\frac{t-b}{a}\right) s(t) dt \quad (3)$$

(3)式表明, 子波变换因子  $W_s(a,b)$  就是子波核函数和信号函数的内积, 即相关. 子波变换在频谱域中可以写为<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned} W_s(a,b) &= \langle H_{a,b}, S \rangle = \int H_{a,b}^*(f) S(f) df \\ &= \sqrt{a} \int H^*(af) \exp(j2\pi fb) S(f) df \end{aligned} \quad (4)$$

这里,  $H_{a,b}(f) = \int \exp(-j2\pi ft) h_{a,b}(t) dt = a^{1/2} \exp(-j2\pi fb) H(af)$ ,  $S(f)$  为  $s(t)$  的傅里叶变换. 以上两式都是一维的表达形式, 可以很容易地推广到二维的情形. (4)式表明, 子波变换与光

学中 Vander Lugt 匹配滤波器很相似, 因而可以由典型的  $4f$  光学系统实现. 用光学方法来实现在子波变换已有许多报道<sup>[2,3,7,8]</sup>.

## 2.2 联合变换相关器

典型的联合变换相关器原理结构如图 1 所示, 联合变换输入图像  $f(x, y)$  和参考图像  $r(x, y)$  的频谱由平方率探测器件如: *LCLV*、*CCD* 等接收, 得到联合变换功率谱, 再由一束平行光读出, 经透镜  $L_2$  反傅里叶变换后在相关面得到相关点. 现在把输入图像变成目标图像  $s(x, y)$ , 把参考图像变成子波函数  $h(x, y)$ , 则联合图像可写为:

$$g(x, y) = s(x, y) + h\left(\frac{x-b}{a}, y\right) \quad (5)$$

其频谱为:

$$G(f_x, f_y) = S(f_x, f_y) + aH(af_x, f_y) \exp(-j2\pi f_y b) \quad (6)$$

其联合变换功率谱为:

$$\begin{aligned} |G(f_x, f_y)|^2 &= |S(f_x, f_y)|^2 + |aH(af_x, f_y)|^2 \\ &+ aS(f_x, f_y)H^*(af_x, f_y) \exp(j2\pi f_y b) \\ &+ aS^*(f_x, f_y)H(af_x, f_y) \exp(-j2\pi f_y b) \end{aligned} \quad (7)$$

相关面的输出为:

$$\begin{aligned} g_c(x, y) &= s(x, y) \star s^*(x, y) + h\left(\frac{x}{a}, y\right) \star h^*\left(\frac{x}{a}, y\right) \\ &+ s(x, y) \star h^*\left(\frac{x-b}{a}, y\right) + s^*(x, y) \star h\left(\frac{x+b}{a}, y\right) \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式中符号 $\star$ 表示相关操作. 第一、第二项为自相关项, 位于相关面的原点. 第三、第四项为互相关项, 位于相关面离中心距离为 $\pm b$ 处. 在过去的有关联合变换相关器的报道中<sup>[5,6]</sup>, 大多把它用作相关匹配的模式识别或多目标模式识别, 当输入图像  $f(x, y)$  与参考图像  $r(x, y)$  一致时, (8)式的第三、第四项就较大, 得到较高的相关峰; 不一致时, 就很小, 基本没有相关峰; 若为多目标输入时, 与参考图像一致的, 就得到很大的相关峰, 确定出目标是否跟参考图像一致, 或目标在输入图像中的位置. 从(7)、(8)式可以看到其中的第三、第四项的结构与(3)、(4)式是一致的, 只有归一化因子不同, 所以本文把参考信号改成子波函数或别的滤波函数(只要它们可以用光学或光电混合方法表达), 用联合变换相关器来实现光学子波变换或滤波操作.

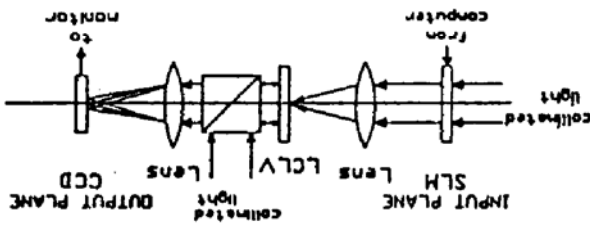


Fig. 1 Joint transform correlator

## 3 数值模拟结果

为了验证上一节的理论描述, 分别对 Haar 子波和 Roberts 滤波器<sup>[9]</sup>进行了计算机模拟.

与傅里叶变换不同, 子波变换的核函数不是唯一的. 对子波变换核的选取依赖于子波变换的应用. 对子波核函数的要求是它应满足(1)式的条件, 但在实际应用中, 子波函数在空间域或频率域中都应有很好的局域性, 以使用较少的子波因子来表达信号, 较好地提取出图像

的特征. 数学家 Haar 在四十年代提出的 Haar 子波函数满足正交子波基的要求, 它实际上就是一个阶跃函数, 其一维形式的子波母函数可以表达为:

$$h(t) = \text{rect} \left[ 2\left(t - \frac{1}{4}\right) \right] - \text{rect} \left[ 2\left(t - \frac{3}{4}\right) \right] \quad (9)$$

可以由 Haar 函数派生出用来提取角、边等特征的子波母函数<sup>[8]</sup>. 垂直边、水平边、角的 Haar 子波母函数可以用更为直观的算子形式表达:

$$h_v = |1 - 1| \quad h_h = \begin{vmatrix} 1 & \\ & -1 \end{vmatrix}, \quad h_c = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ & 1 - 1 \end{vmatrix} \quad (10)$$

一个二维的 Haar 子波母函数及其傅里叶变换如图 2 所示. 显然 Haar 子波是不连续的, 所以在理论上其用处不大, 但是它的三态特性特别适合光电器件实现, 并且 Haar 函数的不同形式组合在提取图像的边角特性方面很有效, 因此它经常被光学研究人员所采用.

在图像处理中的一个典型问题是探测灰度级从一个像元到另一个像元的突然变化, 这种变化通常指示出一个边界, 即图像的边缘. (10)式的垂直和水平 Haar 子波只为探测两个特殊的方向而设计, 若要在所有方向上产生边缘增强可以靠在两个正交方向上对图像进行滤波, 然后在向量计算中将结果综合起来而达到. Roberts 梯度滤波器是一种有效的提取图像边缘的数值梯度滤波器<sup>[5]</sup>, 它是用两个 2X2 的核与被处理图像的卷积来近似边沿在每一个像元处的水平和垂直方向的强度. 这两个 2X2 的核记为:

$$R_+ = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad R_- = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

被处理图像的每一个像元由这两个算子操作后的绝对值最大者给出:

$$f_{\text{edge}}(x, y) = \max\{|R_+ \star f(x, y)|, |R_- \star f(x, y)|\}$$

由于 Roberts 算子在结构上与 Haar 子波类似, 其空域中的积分面积为零, 其物理性质也相似, 都可用来抽取图像的边、角等特性, 两者在空域和频域中都有较好的局域性. 这样 Roberts 算子也可以看作子波函数, 所以本文探讨并模拟了这两个函数用联合变换相关器结构来实现子波变换的可行性.

在计算机模拟中, 把要处理的图像和 Haar 子波或 Roberts 滤波器一起编成一幅  $64 \times 64$  的数据图像, 待处理的图像位于中心或离中心  $b/2$  的位置占  $16 \times 16$  个像元, 子波函数的大小由扩因子决定, 最小占  $2 \times 2$  个像元, 位于离中心水平距离为  $b$  或  $b/2$  的位置, 其余的像元都用 0 填充. 模拟中采用与光学联合变换相关器实验相同的步骤, 先对联合图像进行快速傅里叶变换, 求其功率谱, 再对功率谱进行反快速傅里叶变换, 就可得到相关输出结果. 对结果按子波变换的要求进行归一化处理. 模拟结果采用三维绘图软件画出, 或经图像卡送给监

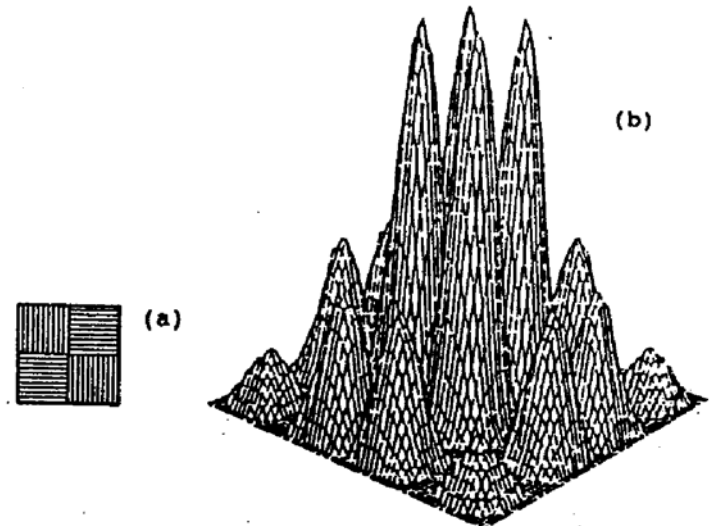


Fig. 2 A 2-D Haar wavelet (a), and its Fourier transform (b)

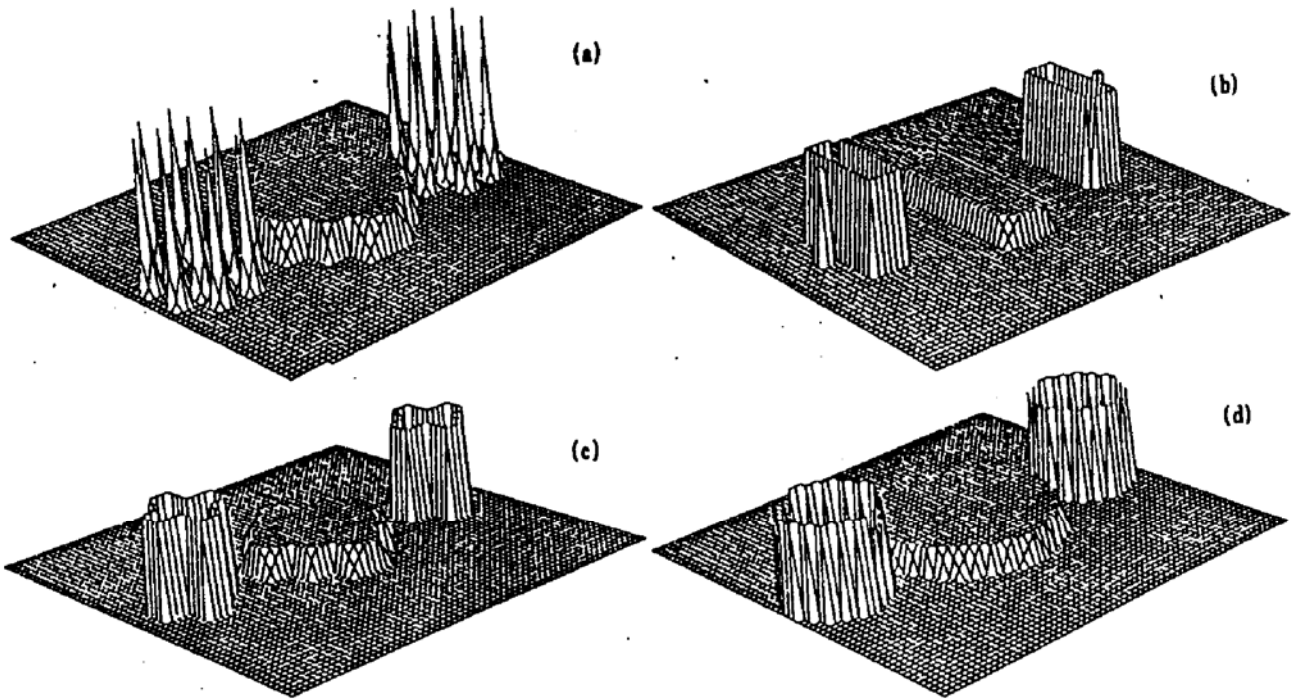


Fig. 3 Computer simulation results of the wavelet transform with JTC

- (a) 12X12 cross and 2X2 corner Haar wavelet  $h_c$  as joint image;
- (b) 14X4 rectangle and 1X2 vertical edge  $h_v$  and 2X1 horizontal edge  $h_h$  Haar wavelets as joint image
- (c) 12X12 cross and 2X2 Roberts  $R_+$  as joint image
- (d) 14X14 circle and 2X2 Roberts  $R_+$  as joint image

视器显示. 被处理的图像有十字、方块和圆. 图 3(a)为一个十字和  $2 \times 2$  的角 Haar 子波  $h_c$  作为联合图像得到十字的角特征; 图 3(b)为水平边和垂直边 Haar 子波  $h_h$ 、 $h_v$  分别放在一个方块的两边作为联合图像得到方块的边沿, 由图可见到两个子波函数本身的相关点; 图 3(c)为  $R_+$  和十字作为联合图像得到十字的边沿, 可以看到边沿增强了的十字在有一个方向上的角是缺点的, 这可由  $R_+$  来弥补; 图 3(d)为  $R_+$  与一个圆作为联合图像得到圆的边沿, 也有一个方向是不连续的. 模拟结果中, 零级比一级都要大很多, 在以上的图示中对零级都作了域值处理.

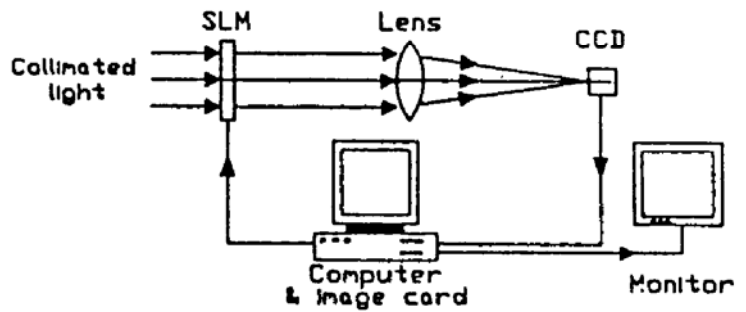


Fig. 4 Proposal setup of optical wavelet transform with JTC

所以用经典的联合变换相关器很难作子波变换, 必须对联合变换功率谱或实验结构作些处理, 比如: 对联合变换功率谱进行二值化<sup>[9]</sup>, 幅度调制联合变换相关器<sup>[10]</sup>等. 根据以上的模拟设计了图 4 的光学实验原理结构. 两次快速傅里叶变换由同一个透镜实现, 联合变换功率谱由 CCD 探测经计算机处理后送给 SLM, 最终的相关结果由计算机按子波变换的要求处理后送显示器显示. 这样能把光学处理的快速、并行的特性和电子技术的灵活性很好地结合起来.

**结 论** 光学子波变换可以用联合变换相关器实现, 克服了制作复滤波器和准确复位的困难, 不同扩因子的子波函数可由计算机实时生成. Haar 子波和 Roberts 滤波函数等可以用联合变换相关器结构实现来提取图像的边、角、和边沿增强等, 并为后模式识别提供位置、尺

度等特征信息. 两个正交的水平边和垂直边 Haar 子波用联合变换相关器结构综合起来一次性提取出图像的边沿. Roberts 滤波函数满足子波函数的要求, 可以作为子波核函数. 只要用两个 Roberts 滤波函数之一, 如  $R_+$ , 并用联合变换相关器结构就可得到图像的边沿增强像, 只是在有一个方向上的边沿不太连续, 若被处理图像的像素足够大, 其不连续性是不明显的. 用联合变换相关器来实现子波变换, 并用计算机控制, 把光学的并行、快速的优越性和电子技术的灵活性结合起来了, 可以实现“真实”的光学子波变换.

### 参 考 文 献

- [1] J. M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian *et al.*, *Wavelets*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [2] H. Szu, Yunlong Sheng, Jing Chen, Wavelet transform as a bank of the mathed filters. *Appl. Opt.*, 1992, **31** (17): 3267~3277
- [3] Yao Li, YanZhang, Coherent optical processing of Gabor and Wavelet expansion of one and two-dimensional signals. *Opt. Engng.*, 1992, **31**(9): 1865~1885
- [4] C. S. Weaver, J. W. Goodman, Technique for optically convolving two functions. *Appl. Opt.*, 1966, **5**(7): 1248~1249
- [5] M. S. Alam, O. Perez, M. A. Karim, Preprocessed multiobject joint transform correlator. *Appl. Opt.*, 1993, **32** (17): 3102~3107
- [6] F. T. S. Yu, E. C. Tam, D. A. Gregory High-efficiency joint-transform correlator. *Opt. Lett.*, 1990, **15**(18): 1029~1031
- [7] Yunlong Sheng, D. Roberge, H. Szu Optical wavelet transform. *Opt. Engng.*, 1992, **31**(9): 1840~1845
- [8] Xiangyang Yang, H. Szu, Yunlong Sheng *et al.*, Optical Haar wavelet transforms of binary images. *Opt. Engng.*, 1992, **31**(9): 1846~1851
- [9] B. Javidi, C. Kuo Joint transform image correlation using a binary spatial light modulator at the Fourier plane. *Appl. Opt.*, **27**(4): 663~665
- [10] D. Feng, H. Zhao, S. Xia Amplitude-modulated JTC for improving correlation discrimination. *Opt. Commun.*, 1991, **88**(3,4): 260~264

## Theory Analysis of Optical Wavelet Transform Using Joint Transform Correlator

Wang Wenlu    Jin Guofan    Yan Yingbai    Wu Minxian

(Department of Precision Instruments, Tsinghua University, Beijing 100084)

(Received 31 August 1993; revised 29 November 1993)

**Abstract** Optical wavelet transform (WT) with joint transform correlator (JTC) was described in this paper. Haar wavelets and Roberts filters, respectively, were put together with an object image as a joint image. At the output plane of the JTC, the WT of the object was obtained, the features, such as corners, edges, sharpening images, of the object were extracted. These features will be useful in post-pattern recognition. A programmable optical joint wavelet transform system was proposed in this paper, which can be used to realize “true” WT of an object image. Digital simulation results are provided.

**Key words** wavelet transform, joint transform correlator