第 14 卷 第 10 期
1994 年 10 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 14, No. 10
October, 1994

q-玻色湮没算符高次幂的本征态及其性质

王继锁[1)] 王传奎[1)]
(聊城师范学院光通信研究所，聊城 252059)

摘 要 研究了 q-玻色湮没算符高次幂 a_q^k $(k \geqslant 3)$ 的正交归一本征态的数学结构，在此基础上讨论了它们的数学性质及其 q-压缩和振幅 N 次方压缩特性. 发现它们能组成一个完备的希尔伯特(Hilbert)空间；且当 k 为偶数时，这些本征态均可存在振幅 N 次方 $[N=(m+½)k,\ m=0, 1, 2, \cdots]$ 压缩.

关键词 算符 a_q^k， 数学性质， q-压缩， 振幅 N 次方压缩.

1 引 言

1963 年 Glauber 相干态[1]的提出，解决了人们用量子电动力学研究光的数学困难，大大促进了量子光学的发展. 目前相干态理论及其应用已成为物理学研究的一个重要领域[2]. 近年来，量子完全可积系统理论的发展，引起了物理学界和数学工作者对量子群及其可能的物理应用研究产生了广泛的兴趣[3]. 人们认为将具有李群结构的通常相干态推广至具有量子李群结构的相干态，将是十分有意义的. 最近，作者在文献[4～6]中曾详细地研究了通常的玻色湮没算符高次幂 a^k $(k \geqslant 3)$ 的本征态的数学结构及其量子统计性质，其结果表明，这些本征态均具有非经典效应，且能组成一个以非经典光场态作基矢的完备表象. 1989 年，Biedenharn[7] 率先将 Glauber 相干态推广到 q 类似情形，提出了 q-相干态的概念. 最近韦联福[8]研究了 q-玻色湮没算符二次幂 a_q^2 的本征态，并且证明了这些本征态也可构成一个完备表象. 本文在此基础上研究 q-玻色湮没算符高次幂 a_q^k $(k \geqslant 3)$ 的本征态的数学结构及其性质.

2 a_q^k 的正交归一本征态的数学结构

由文献[8]知，q-玻色湮没算符高次幂 a_q^k 的本征值为 α^k 的本征态(k 重简并态)为

$$|\psi_j^q\rangle_k = C_j^q(|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{kn+j}}{\sqrt{[kn+j]_q!}} |kn+j\rangle_q, \tag{1}$$

式中 C_j^q 为相应态矢的待定归一化系数，α 为复参数，j 的可能取值(下同) 为 $j=0, 1, 2, \cdots, k-1$；而函数$[y]_q$定义为$[y]_q = \dfrac{q^y - q^{-y}}{q - q^{-1}}$，$q$ 阶乘$[n]_q!$由$[n]_q! = [n]_q[n-1]_q[n-2]_q\cdots\cdots[1]_q$

---

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室).

收稿日期：1993 年 10 月 4 日

给出.

为求(1)式中的归一化系数，令 $|\alpha|^2 = x$，利用归一化条件得归一化系数为

$$C_j^q(x) = [A_j^q(x)]^{-1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn+j}}{[kn+j]_q!}\right)^{-1/2} \tag{2}$$

这样得到了 a_q^k 的 k 个本征态，即

$$|\psi_j^q\rangle_k = [A_j^q(|\alpha|^2)]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^{kn+j}}{\sqrt{[kn+j]_q!}} |kn+j\rangle_q, \tag{3}$$

由在 q-Fock 空间 $\{|n\rangle_q\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 内的公式

$$a_q|n\rangle_q = \sqrt{[n]_q}\,|n-1\rangle_q \tag{4}$$

可知，由(3)式所定义的这 k 个态确实是 a_q^k 的本征值为 α^k 的本征态(k 重简并态)，即有

$$a_q^k\,|\psi_j^q\rangle_k = \alpha^k\,|\psi_j^q\rangle_k. \tag{5}$$

容易证明，a_q^k 的这 k 个本征态之间彼此是正交归一的，即有

$${}_k\langle\psi_{j'}^q|\psi_j^q\rangle_k = \delta_{j'j},\ (j', j = 0, 1, 2, \cdots, k-1). \tag{6}$$

3 a_q^k 正交归一本征态的数学性质

如所周知，对于 Biedenharn[7] 所引入的 q- 相干态 $|\alpha\rangle_q$，Gray 等人[9]证明了它是超完备的，即存在如下的单元分解：

$$\left.\begin{aligned} &\int |\alpha\rangle_{qq}\langle\alpha|\,d\mu(\alpha) = 1. \\ &d\mu(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\exp_q(|\alpha|^2)\exp_q(-|\alpha|^2)d_q|\alpha|^2 d\theta,\ \exp_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]_q!} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中 $\exp_q(x)$ 为 q 指数函数，所以态 $|\alpha\rangle_q$ 象 Glauber 相干态一样，能组成一个完备表象.

同样，对于 a_q^k 的上述 k 个正交归一本征态关心的数学性质是这 k 个本征态能否构成一个完备的 q-希尔伯特空间，即它们能否作为一个表象使用. 为此，仿照 q- 相干态的完备性条件(7)式，定义如下 k 个算符：

$$I_j = \int |\psi_j^q\rangle_{kk}\langle\psi_j^q|d\,\mu(\alpha), \tag{8}$$

并在任意一个归一化的态矢中求这个 k 个算符的平均值，看其是否为 1. 最为方便的做法是在任一 q-Fock 空间态 $|n'\rangle_q$ 中求平均值. 例如对 I_0 有

$${}_q\langle n'|I_0|n'\rangle_q = \begin{cases} \displaystyle\iint \frac{|\alpha|^{2n'}d\mu(\alpha)}{A_0^q(|\alpha|^2)[n']_q!}, & n' \neq kn \\ 0, & n' = kn \end{cases} \tag{9}$$

这表明，I_0 不是单位算符，而且由于上述积分值随态 $|n'\rangle_q$ 而变，即不是一个常数，也不能将 I_0 化成单位算符，因此定义在复平面上的态 $|\psi_0^q\rangle_k$ 不能构成完备的 q- 希尔伯特空间. 同理可证，a_q^k 的其余$(k-1)$个本征态也都不能单独构成完备的 q- 希尔伯特空间，它们都不能像 q- 相干态那样作为表象使用. 但是可以证明，a_q^k 的这 k 个本征态的组合却具有 q- 相干态那样的完备性，即存在着如下的单元分解：

$$I = \int \{\sum_{j=0}^{k-1} A_j^q(|\alpha|^2)\,|\psi_j^q\rangle_{kk}\langle\psi_j^q|\}d\mu(\alpha) = 1 \tag{10}$$

所以 a_q^k 的这 k 个正交归一本征态的组合能够组成一个完备的 q- 希尔伯特空间，从而可作为一个完备表象的基矢. 例如在这个表象中，q- 相干态可表示为

$$|\alpha\rangle = \exp_q(-|\alpha|^2/2)\sum_{j=0}^{k-1}[A_j^q(|\alpha|^2)]^{1/2}|\psi_j^q\rangle_k. \tag{11}$$

其次，在由 a_q^k 的上述 k 个本征态所组成的 k 维 q- 希尔伯特空间里，通过 a_q 的连续作用可实现这 k 个本征态间的相互转换. 例如若将 a_q 连续作用在态 $|\psi_0^q\rangle_k$ 上，不难得到

$$a_q^i|\psi_0^q\rangle_k = \alpha^i(A_0^q)^{-1/2}(A_{k-i}^q)^{1/2}|\psi_{k-i}^q\rangle_k, \qquad (i=1,2,\cdots,k), \tag{12}$$

即 a_q 连续作用于态 $|\psi_0^q\rangle_k$ 上，可使该态按照 $|\psi_0^q\rangle_k \to |\psi_{k-1}^q\rangle_k \to |\psi_{k-2}^q\rangle_k \to \cdots \to |\psi_1^q\rangle_k \to |\psi_0^q\rangle_k$ 的顺序，历经其它$(k-1)$个态后又回到原态 $|\psi_0^q\rangle_k$，亦即 a_q 在这 k 个本征态之间起了一个“转动”算符的作用.

再者，当 α 取不同值时，a_q^k 的上述 k 个 本征态的各态矢的内积为

$$\begin{aligned}{}_k\langle\psi_j^q(\alpha)|\psi_j^q(\alpha')\rangle_k &= \{A_j^q(|\alpha|^2)A_j^q(|\alpha'|^2)\}^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^*\alpha')^{kn+j}}{[kn+j]_q!}\\ &= \{A_j^q(|\alpha|^2)A_j^q(|\alpha'|^2)\}^{-1/2}A_j^q(\alpha^*\alpha')\neq 0.\end{aligned} \tag{13}$$

这表明，在 α 复平面上，a_q^k 的这 k 个本征态与 q- 相干态一样，本身并不正交.

4　a_q^k 的正交归一本征态的量子统计性质

4.1　本征态的非经典光场的统计性质[10]

与通常的电磁场单模压缩的定义相类似，引入 q-电磁场的 q-压缩. 按标准方式，若量子力学变量 x_i 的集合形成如下的李代数形式 $[x_i, x_j] = a_{ij}^k x_k$，当涨落满足 $\Delta x_i^2 \leqslant \frac{1}{2}|a_{ij}^k\langle x_k\rangle|$ 或 $\Delta x_j^2 \leqslant \frac{1}{2}|a_{ij}^k\langle x_k\rangle|$ 时，称这样的态为压缩态. 定义 $x_i^q(i=1.2)$ 为 q- 电场正交位相的振幅算符[11]，它们可通过 q- 湮没算符 a_q，q- 产生算符 a_q^+ 来表示

$$x_1^q = (a_q^+ + a_q)/2, \qquad x_2^q = i(a_q^+ - a_q)/2, \tag{14}$$

算符 a_q、a_q^+ 其 q- 变形对易关系式满足[12]

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = q^{-Nq}, \tag{15}$$

式中 N_q 为厄米数算符，且有

$$a_q^+ a_q = [N_q]_q = \frac{q^{N_q} - q^{-N_q}}{q - q^{-1}}, \qquad [N_q, a_q] = -a_q, \qquad [N_q, a_q^+] = a_q^+. \tag{16}$$

若变量 x_1^q 满足如下关系式

$${}_q\langle(\Delta x_1)^2\rangle_q < \frac{1}{4}\,{}_q\langle[a_q, a_q^+]\rangle_q, \qquad \text{或} \qquad {}_q\langle(\Delta x_1)^2\rangle_q - \frac{1}{4}\,{}_q\langle[a_q, a_q^+]\rangle_q < 0 \tag{17}$$

则称 q- 光 场在 x_1^q 分量上为q- 压 缩，对于变量 x_2^q 也是如此.

4.2　本征态中的期待值

因为对于 a_q^k 的 k 个正交归一本征态均有

$${}_k\langle\psi_j^q|a_q^+|\psi_j^q\rangle_k = {}_k\langle\psi_j^q|a_q|\psi_j^q\rangle_k = {}_k\langle\psi_j^q|a_q^{+2}|\psi_j^q\rangle_k = {}_k\langle\psi_j^q|a_q^2|\psi_j^q\rangle_k = 0,$$

又由(12)式得

$${}_k\langle\psi_0^q|a_q^+ a_q|\psi_0^q\rangle_k = |\alpha|^2 A_{k-1}^q/A_0^q, \tag{18}$$

$${}_k\langle\psi_i^q|a_q^+ a_q|\psi_i^q\rangle_k = |\alpha|^2 A_{i-1}^q/A_i^q, \qquad (i=1,2,\cdots,k-1), \tag{19}$$

所以在态 $|\psi_0^q\rangle_k$ 中有

$${}_k\langle\psi_0^q|(\Delta x_i^q)^2|\psi_0^q\rangle_k-(1/4)_k\langle\psi_0^q|[a_q,a_q^+]|\psi_0^q\rangle_k=(1/2)|\alpha|^2A_{k-1}^q/A_{0}^q,\ (i=1,\ 2),\tag{20}$$

在态 $|\psi_j^q\rangle$ 中($j=1,2,\cdots,k-1$)有

$${}_k\langle\psi_0^q|(\Delta x_i^q)^2|\psi_j^q\rangle_k-(1/4)_k\langle\psi_j^q|[a_q,a_q^+]|\psi_j^q\rangle_k=(1/2)|\alpha|^2A_{j-1}^q/A_j^q,\ (i=1,\ 2),\tag{21}$$

而由(2)式可知，当 $x=|\alpha|^2\neq 0$ 时总有 $A_j^q(x)>0$，因此当 $|\alpha|^2\neq 0$ 时，(20) 和(21) 式的右端均大于零，故 a_q^k 的 k 个本征态均不存在 q-压缩效应.

同样，仿照 Zhang 等人[13]对通常光场振幅 N 次方压缩的定义，定义两个可测量即两个厄米算符：

$$Z_1^q(N)=(a_q^{+N}+a_q^N)/2,\quad Z_2^q(N)=i(a_q^{+N}-a_q^N)/2,\tag{22}$$

它们分别表示 q-光场复振幅 N 次幂的实部和虚部. 容易证明，算符 $Z_1^q(N)$ 和 $Z_2^q(N)$ 满足对易关系

$$[Z_1^q(N),\ Z_2^q(N)]=(i/2)[a_q^N,\ a_q^{+N}]\tag{23}$$

和测不准关系

$$(\Delta Z_1^q)^2(\Delta Z_2^q)^2\geqslant(1/16)|_q\langle[a_q^N,\ a^{+N}]\rangle_q|^2,\tag{24}$$

若

$${}_q\langle(\Delta Z_i^q)^2\rangle_q<\frac{1}{4}\,{}_q\langle[a_q^N,\ a_q^{+N}]\rangle_q,\quad 或\quad {}_q\langle(\Delta Z_i^q)_q^2-\frac{1}{4}\,{}_q\langle[a_q^N,\ a_q^{+N}]\rangle_q<0,\ (i=1,2)\tag{25}$$

成立，则称 q-光场存在振幅 N 次方压缩. 下面分四种情况来研究 a_q^k 的 k 个正交归一本征态的这种高阶压缩特性.

4.2.1 当 $N=mk$ ($m=1,2,3,\cdots$) 时

在这种情况下，对于 a_q^k 的 k 个正交归一本征态均有

$$\left.\begin{aligned}&{}_k\langle\psi_j^q|a_q^{+2N}|\psi_j^q\rangle_k=r^{2mk}e^{-i2mk\theta},\quad {}_k\langle\psi_j^q|a_q^{2N}|\psi_j^q\rangle_k=r^{2mk}e^{i2mk\theta}\\&{}_k\langle\psi_j^q|a_q^{+N}|\psi_j^q\rangle_k=r^{mk}e^{-imk\theta},\ {}_k\langle\psi_j^q|a_q^{N}|\psi_j^q\rangle_k=r^{mk}e^{imk\theta},{}_k\langle\psi_j^q|a_q^{+N}a_q^N|\psi_j^q\rangle_k=r^{2mk}.\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

式中 $\alpha=r\exp(i\theta)$. 将(26)式代入(25)式得

$${}_k\langle\psi_j^q|(\Delta Z_i^q)^2|\psi_j^q\rangle_k-(1/4)_k\langle\psi_j^q|[a_q^N,\ a_q^{+N}]|\psi_j^q\rangle_k=0,\ (i=1,2)\tag{27}$$

这表明 a_q^k 的 k 个正交归一本征态都是算符 $Z_1^q(N)$ 和 $Z_2^q(N)$ 的最小测不准态.

4.2.2 当 k 为奇数且 $N=mk+i$ ($m=0,\ 1,\ 2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,\ k-1$) 时

这时对于 a_q^k 的 k 个正交归一本征态均有

$${}_k\langle\psi_j^q|a_q^{+2N}|\psi_j^q\rangle_k={}_k\langle\psi_j^q|a_q^{2N}|\psi_j^q\rangle_k={}_k\langle\psi_j^q|a_q^{+N}|\psi_j^q\rangle_k={}_k\langle\psi_j^q|a_q^{N}|\psi_j^q\rangle_k=0,\tag{28}$$

而由(12)式得

$${}_k\langle\psi_s^q|a_q^{+N}a_q^N|\psi_s^q\rangle_k-\frac{1}{4}\,{}_k\langle\psi_s^q|[a_q^N,\ a_q^{+N}]|\psi_s^q\rangle_k=r^{2(mk+i)}A_{k-i+s}^q/A_s^q,\ (s=0,\ 1,\ 2,\ ,\cdots i-1),\tag{29}$$

$${}_k\langle\psi_t^q|a_q^{+N}a_q^N|\psi_t^q\rangle_k-\frac{1}{4}\,{}_k\langle\psi_t^q|[a_q^N,\ a_q^{+N}]|\psi_t^q\rangle_k=r^{2(mk+i)}A_{t-i}^q/A_t^q,\ (t=i,\ i+1,\ \cdots,\ k-1).\tag{30}$$

因此，对于态 $|\psi_s^q\rangle_k$ ($s=0,1,2,\cdots,\ i-1$) 有

$${}_k\langle\psi_s^q|(\Delta Z_m^n)^2|\psi_s^q\rangle-\frac{1}{4}\,{}_k\langle\psi_s^q|[a_q^N,\ a_q^{+N}]|\psi_s^q\rangle_k=\frac{1}{2}r^{2(mk+i)}A_{k-i+s}^q/A_s^q,\ (n=1,2)\tag{31}$$

对于态 $|\psi_t^q\rangle_k (t = i, i+1, \cdots, k-1)$ 有

$$_k\langle\psi_t^q|(\Delta Z_n^q)^2|\psi_t^q\rangle_k - \frac{1}{4}\,_k\langle\psi_t^q|[a_q^N, a_q^{+N}]|\psi_t^q\rangle_k = \frac{1}{2}r^{2(mk+i)}A_{t-i}^q/A_t^q, \ (n=1,2) \tag{32}$$

与上面对(20)和(21)式的分析相类似，由以上两式可以得到，这时对于 a_q^k 的 k 个正交归一本征态均不存在振幅 N 次方压缩.

4.2.3　当 k 为偶数且 $N = mk + i\ (m = 0, 1, 2, \cdots; i = 1, 2, \cdots, k/2 - 1, k/2 + 1, \cdots, k - 1)$ 时.

与上面对 4.2.2 节情形的讨论相类似，可以得到，在此情况下 a_q^k 的 k 个正交归一本征态也都不存在振幅 N 次方压缩.

4.2.4　当 k 为偶数且 $N = (m + 1/2)k\ (m = 0, 1, 2, \cdots)$ 时

在此情况下，经类似的讨论，对于 a_q^k 的 k 个正交归一本征态均有

$$_k\langle\psi_s^q|a_q^{+N}a_q^N|\psi_s\rangle_k = r^{(2m+1)k}A_{k/2+s}^q/A_s^q, \quad (s = 0, 1, 2, \cdots, k/2 - 1), \tag{33}$$

$$_k\langle\psi_t^q|a_q^{+N}a_q^N|\psi_t^q\rangle_k = r^{(2m+1)k}A_{t-k/2}^q/A_t^q, \quad (t = k/2, k/2 + 1, \cdots, k - 1), \tag{34}$$

所以对于态 $|\psi_s^q\rangle_k (s = 0, 1, 2, \cdots, k/2 - 1)$ 有

$$_k\langle\psi_s^q|(\Delta Z_1^q)^2|\psi_s^q\rangle_k - \frac{1}{4}\,_k\langle\psi_s^q|[a_q^N, a_q^{+N}]|\psi_s^q\rangle_k = \frac{1}{2}r^{2m+1)k}[A_{k/2+s}^q/A_s^q + \cos(2m+1)k\theta], \tag{35}$$

$$_k\langle\psi_s^q|(\Delta Z_2^q)^2|\psi_s^q\rangle_k - \frac{1}{4}\,_k\langle\psi_s^q|[a_q^N, a_q^{+N}]|\psi_s^q\rangle_k = \frac{1}{2}r^{(2m+1)k}[A_{k/2+s}^q/A_s^q - \cos(2m+1)k\theta], \tag{36}$$

对于态 $|\psi_t^q\rangle_k (t = k/2, k/2 + 1, \cdots, k - 1)$

$$_k\langle\psi_t^q|(\Delta Z_1^q)^2|\psi_t^q\rangle_k - \frac{1}{4}\,_k\langle\psi_t^q|[a_q^N, a_q^{+N}]|\psi_t^q\rangle_k = \frac{1}{2}r^{(2m+1)k}[A_{t-k/2}^q/A_t^q + \cos(2m+1)k\theta], \tag{37}$$

$$_k\langle\psi_t^q|(\Delta Z_2^q)^2|\psi_s^q\rangle_k - \frac{1}{4}\,_k\langle\psi_t^q|[a_q^N, a_q^{+N}]|\psi_t^q\rangle_k = \frac{1}{2}r^{(2m+1)k}[A_{t-k/2}^q/A_s^q - \cos(2m+1)k\theta], \tag{38}$$

由(35)和(36)式可以得到这时态 $|\psi_s^q\rangle_k (s = 0, 1, 2, k/2 - 1)$ 在 $Z_1^q(N)$ 和 $Z_2^q(N)$ 两个方向上存在振幅 N 次方压缩的条件分别为

$$A_{k/2+s}^q/A_s^q + \cos(2m+1)k\theta < 0, \qquad A_{k/2+s}^q/A_s^q - \cos(2m+1)k\theta < 0. \tag{39}$$

而由(37)式和(38)式可以得到这时态 $|\psi_t^q\rangle_k (t = k/2, k/2 + 1, \cdots, k - 1)$ 在 $Z_1^q(N)$ 和 $Z_2^q(N)$ 两方面上存在振幅 N 次方压缩的条件分别为

$$A_{t-k/2}^q/A_t^q + \cos(2m+1)k\theta < 0, \qquad A_{t-k/2}^q/A_t^q - \cos(2m+1)k\theta < 0. \tag{40}$$

前已论述，当 $|\alpha|^2 \neq 0$ 时 $A_j^q(|\alpha|^2) > 0$，所以当 k (k 为偶数) 和 m 分别取任一确定值时，只要适当选取 α 的模值 r 和幅角 θ，不等式(39)、(40) 总可以被满足，即态 $|\psi_j^q\rangle_k$ 总可存在振幅 N 次方[$N = (m + ½)k$, $m = 0, 1, 2, \cdots$；且 k 为偶数] 压缩. 另外由(39) 和(40) 式可知，这时态 $|\psi_j^q\rangle_k$ 在 $Z_1^q(N)$ 方向上的振幅 N 次方压缩，当 $\theta = [(2n+1)\pi/(2m+1)k]$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$|\alpha| = r$ 有最大压缩范围. 同样由(39) 和(40) 式还可以看出，这时态 $|\psi_j^q\rangle_k$ 在 $Z_2^q(N)$ 方向上的振幅 N 次方压缩，当 $\theta = 2n\pi/(2m+1)k$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$|\alpha| = r$ 有最大压缩范围.

最后需要说明的是，与对通常光场二阶相关函数的计算相类似，也可以引入 q- 光场的二阶 q- 相关函数，并通过对 a_q^k 的 k 个本征态的二阶 q- 相关函数的讨论，来研究它们是如何通过反聚束效应来表现其非经典特性的，对此将另文讨论. 另外当 $q \to 1$ 时，本文将回到文献[4,

6] 所讨论的情形. 因此本文是文献[4,6] 在 q- 变形下的推广.

参 考 文 献

[1] R. J. Glauber, Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 1963, **131**(6) : 2766～2788
[2] J. R. Klauder, B. -S. Skagerstam, *Coherent States*. Singapore: World Scientific 1985
[3] V. G. Drinfeld, *Proc. ICM* Berkely 1986 : 798
[4] J. Sun, J. Wang, C. Wang, Orthonomallized eigenstates of operator a^k and their squeezing properties. *J. Mod. Opt* 1991, **38**(11) : 2295～2302
[5] Jinzuo Sun, Jisuo Wang, Chuankui Wang, Orthonormalized eigenstates of cubic and higher powers of the annihilation operator. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(5) : 3369～3372
[6] Jinzuo Sun, Jisuo Wang, Chuankui Wang, Generation of orthonormalized eigenstates of the operator a^k (for $K \geqslant 3$) from coherent states and their higher-order squeezing. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **46**(3) : 1700～1702
[7] L. C. Biedenharn, The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogu .f the boson operators. *J. Phys. (A)*, 1989, **22** (17) : L873～878
[8] 韦联福, q-玻色湮没算符二次方的本征态. 物理学报, 1993, **42**(5) : 757～761
[9] R. W. Gray, C. A. Nelson, A completeness relation for the q-analogue coherent states by q-integration. *J. Phys. (A)*, 1990, **23**(6) : L945～950
[10] S. -D. Du, C. -D. Gong, Squeezing of the kth power of the field smplitude. *Phys, Lett(A)*, 1992, **168**(4) : 296～300
[11] Xia Yunjie, Guo Guangcan, Nonclassical properties of even and odd coherent states. *Phys. Lett. (A)*, 1989, **136**(6) : 281～283
[12] Sun Changpu, Fu Hongchen, The q-deformed boson relization of the quantum group $SU_q(n)$ and its representations. *J. Phys. (A)*, 1989, **22**(21) : 983～986
[13] Z, Zhang L. Xu *et al.*, A new kind of higher-order squeezing of radiation field. *Phys. Lett. (A)*, 1990, **150** (1) : 27～30

Eigenstates of Higher Power a_q^k ($k \geqslant 3$) of the q-Boson Annihilation Operator and Their Properties

Wang Jisuo　　Wang Chuankui
(*Institute of Optical Communication, Liaocheng Teachers' College, Shandong* 252059)
(Received 4 October 1993)

Abstract In this paper, the mathematical structure of k orthonormalized eigenstates of the higher powers a_q^k ($k \geqslant 3$) of the q-boson annihilation operator are studied. Based on the work, the properties of the mathematics, q-squeezing and the amplitude N th-power squeezing are investigated. It is found that they form a complete q-Hilbert space, and the amplitude N th-power squeezing $[N=(m+1/2)k,\ m=0,1,2,\cdots]$ can exist in the all of them when k is even.

Key words operator a_q^k, mathematical property, q-squeezing, amplitude N th-power squeezing.