

Talbot 像对谱面的对称性分析及焦距测量

杨坤涛 廖兆曙

陶景光

(华中理工大学光学系, 武汉 430074) (华中理工大学微观分析中心, 武汉 430074)

提 要

分析了光栅的泰伯(Talbot)像和透镜焦面的关系,提出了 Talbot 像对谱面的对称性原理,并将其用于透镜焦距的测量,方法简单,精度高.

关键词 泰伯效应, 谱面, 莫尔条纹.

1 引 言

广义 Talbot 效应理论中已指出了球面波照明下周期性物体自成像的特点^[1~3]. 本文在此基础上进而分析了透镜位于周期性物体前、后物体的自成像和谱面的关系,发现与谱面对称处 Talbot 像的相等性. 根据此特点进行凸透镜焦距的测量,不需测量莫尔条纹的偏折角和条纹间隔,只需瞄准条纹,方法简单,精度高.

2 周期性物体的 Talbat 像场和谱面的关系

2.1 透镜后置系统

设朗奇(Ronchi)光栅 G 的振幅透过率为:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp i\left(\frac{2\pi}{P}nx\right) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

式中 P 为光栅周期. 单色平面波垂直照明光栅 G, 若只考虑光栅的 0, ±1 级衍射, 在与光栅相距 Talbot 距离处, 有光栅的 Talbot 像, 其强度分布为:

$$I_0 = [A_0 + 2A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{P}x\right)(-1)^M]^2. \quad (M \text{ 为整数}) \quad (2)$$

将透镜 L 置于 Ronchi 光栅 G 后, 如图 1 所示. f' 为 L 的焦距, H, H' 为其前后主面, F' 为焦点, d 为光栅到透镜的距离. 在满足夫朗和费近似条件时, 经透镜变换后, 在透镜谱面上有谱点 $F_{+1}[(\lambda/P)f', 0], F'(0, 0), F'_{-1}[(-\lambda/P)f', 0]$. 在谱面上光场分布为^[4]

$$u_f'(x_f, y_f) = \sum_{n=-1}^{+1} \frac{A_n}{i\lambda f'} \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda f'} \left(1 - \frac{d}{f'}\right) (x_f^2 + y_f^2) \right] \delta \left(x_f - n \frac{\lambda f'}{P}, y_f \right). \quad (3)$$

由(3)式知, ±1 级谱点位相相同, 它们对 0 级谱点有一位相差 $2\pi\lambda(f' - d)/2P^2$.

令谱面处 $z = 0$, 谱面前后为菲涅耳衍射区, 满足菲涅耳近似条件时, 与谱面相距为 z 的光场分布为三个球面波的迭加. 略去相同的位相因子, 在三束球面相交的区域的的光场分布 $u(x, y, z)$ 为:

$$u(x, y, z) = A_0 \exp \left[i \frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda z} \right] + A_1 \exp \left\{ i \left[\frac{\pi}{\lambda} \frac{[x - (\lambda/P)f']^2 + y^2}{z} + \frac{\pi\lambda(f' - d)}{p^2} \right] \right\} \\ + A_{-1} \exp \left\{ i \left[\frac{\pi}{\lambda} \frac{[x + (\lambda/P)f']^2 + y^2}{z} + \frac{\pi\lambda(f' - d)}{p^2} \right] \right\}. \quad (4)$$

$$\text{式中, } z > -f', |z| > z_0 = \begin{cases} z' = \frac{\lambda f'^2}{pr + \lambda f'}, & z < 0 \\ z'' = \frac{rf'^2}{rp - \lambda f'}, & z > 0. \end{cases}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{|z - z_0|} < \frac{r}{f' - z}$$

式中 $2r$ 为通光口径, 即为图 1 中阴影部分. 若 $A_{+1} = A_{-1}$, 强度分布为

$$I(x, y, z) = |u(x, y, z)|^2 \\ = A_0^2 + 2A_1^2 + 4A_0A_1 \cos \left(\frac{2\pi f'}{p} x \right) \cos \left[\frac{\pi\lambda}{p^2} \left(\frac{f'^2}{z} + f' - d \right) \right] + 2A_1^2 \cos \left(\frac{2\pi 2f'}{p} x \right) \quad (5)$$

由(5)式知, 透镜后的光强呈周期性分布, 第三项中的 $\cos \left[\frac{\pi\lambda}{p^2} \left(\frac{f'^2}{z} + f' - d \right) \right]$ 为对比度因子, 第四项为倍频项. 当 $(f'^2/z) + f' - d = m(p^2/\lambda)$, m 为整数时有

$$I = [A_0 + 2A_1 \cos \left(\frac{2\pi f'}{p} x \right) (-1)^m]^2 \quad (6)$$

(6)式为受透镜调制后光栅的 Talbot 像的强度分布. 由(2)式、(5)式和(6)式知, 透镜位于光栅后, 光场的分布与透镜的谱面有如下下关系:

1) 在透镜频谱面前后一定范围内有多光束干涉条纹, 其对比度不一;

2) 满足 $(f'^2)/z + f' - d = m(p^2/\lambda)$ (m 为整数) 处有光栅的 Talbot 像;

3) 各处 Talbot 像周期与该面到频谱面的距离成正比, 其大小 $p' = (|z|/f')p$, 其方向都与原光栅栅线方向相同;

4) 与透镜频谱面对称处的 Talbot 像周期相等;

5) 固定 z , 改变光栅到透镜的距离 d , 可改变条纹的对比度, 而周期不变;

6) 在 $z = f'$ 处, 透镜放入前后, Talbot 像周期相同.

2.2 透镜前置系统

将图 1 透镜 L 放于光栅前, 如图 2 所示. 图中, d' 为透镜到光栅的距离, 谱面处 $z = 0$. 当满足傍轴条件, 根据菲涅耳近似, 由 Talbot 效应知, 在光栅后面的光强分布为^[5]

$$I(x, y, z) = A_0^2 + 2A_1^2 + 4A_0A_1 \cos \left[2\pi \frac{(f' - d')\lambda(z + f' - d')}{2p^2 z} \right] \\ \cdot \cos \left[\frac{2\pi(f' - d')}{p} x \right] + 2A_1^2 \cos \left[\frac{2\pi 2(f' - d')}{p} x \right] \quad (7)$$

由(7)式知, 光栅后的光场呈周期性分布, $\cos \left[2\pi \frac{\lambda(f' - d')(z + f' - d')}{2p^2 z} x \right]$ 为对比度因子, 像的光强分布对比度最好时为:

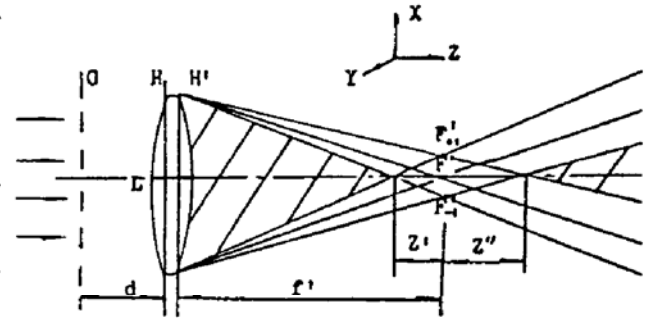


Fig. 1 A setup for Talbot effect of a grating with a lens behind it

$$I(x, y, z) = \left[A_0 + 2A_1 \cos \left(\frac{2\pi f' - d'}{p} x \right) (-1)^m \right]^2 \tag{8}$$

因此,透镜位于光栅前时,光栅后的光场分布与透镜谱面有如下关系:

- 1) 在透镜频谱面前后一定范围内有多光束干涉条纹,其对比度不一;
- 2) 满足 $[(f' - d')(z + f' - d')/z] = m(p^2/\lambda)$ (m 为整数)处有光栅的 Talbot 像;
- 3) 各处 Talbot 像周期与该面到频谱面的距离成正比,基大小为 $p' = [|z|/(f' - d')]p$,其方向都与原光栅栅线方向相同;
- 4) 与谱面对称处的 Talbot 像周期相等;
- 5) 固定 z 及透镜位置,移动光栅改变光栅与透镜间隔 d' ,可改变条纹的对比度和周期;
- 6) 在 $z = f' - d'$ 处,Talbot 像周期与原光栅周期相同.

综上所述,透镜对周期性物体的 Talbot 像的调制作用是改变其周期,使其与谱面对称处的 Talbot 像周期相等,改变物体与透镜的距离,可改变像光强分布的对比度.

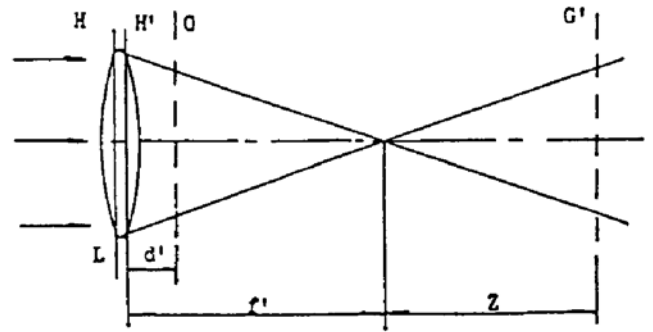


Fig. 2 A setup for Talbot effect of a grating with a lens in front of it

3 凸透镜焦距的测量

3.1 测量方法

3.3.1 2f' 面的确定

用相干平面波垂直照明栅距为 p_1 的 Ronchi 光栅 G_1 ,在其 Talbot 像面处放上另一相同使栅距的 Ronchi 光栅 G_2 ,令两者栅线有一小夹角 θ ,调整使紧靠 G_2 的接收屏 E 上的双丝方向与光栅 G_1 的 Talbot 像 G_1 和 G_2 形成的莫尔条纹方向相同^[6].然后在 G_1 后放入被测透镜 L 如图 3 所示.透镜加入后,莫尔条纹方向发生变化,前后移动 L ,至接收屏上的双丝再度与莫尔条纹方向重合,由(6)式知,此时 $z = f'$.

3.3.2 频谱面的定位

将 G_2, E 同时前移一小距离 h 至 B 点,调整 E 上双丝对准莫尔条纹,再将 G_2, E 向前移动 h_2 ,至莫尔第纹再次与 E 上双丝方向一致.设此时 G_2 位于 A , (见图 3),由 Talbot 像对谱面的对称性知,频谱面在 \overline{AB} 的中点处.

$$f' = h_1 + (h_2/2) \tag{8}$$

在对准过程中,若莫尔条纹对比度不够好,可前后移动光栅 G_1 调节.

3.2 实验结果

本文用 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 的 He-Ne 激光为光源,选 Ronchi 光栅 G_1, G_2 ,栅距 $p_1 = p_2 = 0.2 \text{ mm}$,通光面积为 $95 \times 95 \text{ mm}^2$,照明光束口径为 $\phi 60 \text{ mm}$.采用视场中部瞄准,对二个透镜进行了测量,测量结果为 210.1 mm 和 157.4 mm .用精度为 0.3% 的焦距仪测得该两个透镜焦距的值分别对应为 209.5 mm 和 157.0 mm .

又将 G_1 放入被测透镜后,先将 G_2 与 G_1 重合,确定莫尔条纹方向,再移动 G_2 找同向莫尔条

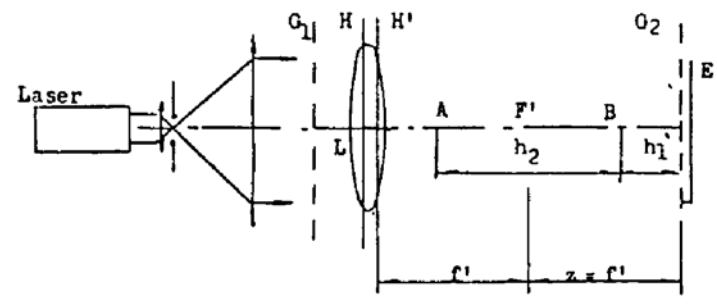


Fig. 3 Moire deflectometer setup for measuring focal length of a lens L , test lens; G_1, G_2 , Ronchi gratings; E , mat screen

纹处确定谱面,同样采用目视瞄准,光具座上的 mm 刻尺直接读数,由九位实验者分别进行测量,九次测得的最大值与最小值的相对误差小于 0.4%。

3.3 精度分析

忽略照明光束不准直度及导轨不直度带来的误差,主要误差源是莫尔条纹和双丝重合的瞄准误差 $\Delta\alpha$ 和长度测量误差 Δf_s 。

设人眼单次瞄准误差为 $\Delta\alpha$ 。由莫尔条纹方程式

$$\operatorname{tg}(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{p_2 \cos \theta - p_1}{p_2 \sin \theta} \quad (9)$$

设 $z = f' + \Delta z$, $p_1 = (|z|/f')p_2 = [(f' + \Delta z)/f']p_2$, 当 θ 很小, $p_1 \approx p_2$ 时,有 $\operatorname{tg}(\alpha + \Delta\alpha) \approx \operatorname{tg} \alpha + \Delta\alpha$, $\sin \theta \approx \theta$

$$\Delta z/f' = \theta \Delta\alpha \quad (10)$$

确定 $2f'$ 面单次瞄准误差引起的焦距测量误差为 $\Delta f_{1\alpha} = f' \theta \Delta\alpha$, 确定谱面单次瞄准引起的测量误差为 $\Delta f_{2\alpha} = (1/2)f' \theta \Delta\alpha$ 。

$$\Delta f_\alpha = \sqrt{2(\Delta f_{1\alpha})^2 + 2(\Delta f_{2\alpha})^2} = 1.58 f' \theta \Delta\alpha \quad (11)$$

$$\Delta f_\alpha/f' = 1.58 \theta \Delta\alpha \quad (12)$$

当 $\theta = 2^\circ$, 设 $\Delta\alpha = \pm 0.5^\circ$, $(\Delta f')/f' = \pm 0.05\%$, $\Delta f_\alpha = \pm 0.0005f'$ 。从上式知,由瞄准误差引起的测量误差是很小的且相对误差与焦距无关。

设长度测量误差为 $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \pm 0.3 \text{ mm}$

$$\Delta f_s = \Delta h_1 + (\Delta h_2)/2, \quad (13)$$

$$\Delta f_s = \pm 0.45 \text{ mm}, \quad \Delta f' = \pm \sqrt{\Delta f_s^2 + \Delta f_\alpha^2} = \pm \sqrt{0.2 + 3 \times 10^{-7} f'^2} \quad (14)$$

当 $f' = 210 \text{ mm}$, $\Delta f'/f' = \pm 0.2\%$ 。当 $f' = 157 \text{ mm}$, $\Delta f'/f' = \pm 0.3\%$ 。

4 讨 论

文献[7]~[14]都介绍了用莫尔偏折术测量焦距的方法,大多用莫尔条纹的方向(或间隔)的变化来推出透镜焦距,基本计算公式为^[14] $f' = s + (z_t/2)[1 + 1/(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\theta/2))]$, 一般都需精确确定光栅间隔 z_t , 光栅栅线夹角 θ , 莫尔条纹方向角 α , 这样不仅麻烦,且每一项参数的测量都会引进误差,而透镜后主面到第一块光栅的距离 s 要用光斑大小或其它方法来确定,否则只能测量薄透镜。

利用 Talbot 像对谱面的对称性原理测量凸透镜焦距,不需要测量莫尔条纹方向,也不需要知道光栅栅距和两块光栅栅线的夹角,两栅距也不要求绝对相等,它只要瞄准条纹和读出光栅移动量,所以非常方便。由于只需瞄准条纹,用光电元件接收光强信号,电路设计十分简单。它适用于像差小的正透镜。

参 考 文 献

- [1] S. Yokozeki, T. Suzuki, Shearing interferometer using the grating as beam splitter. *Appl. Opt.*, 1971, 10(7): 1575~1579
- [2] D. E. Silva, Talbot interferometer for radial and lateral derivatives. *Appl. Opt.*, 1972, 11(11): 2613~2624
- [3] 廖江红, 顾去吾, 光学系统中的光栅衍射自成像现象: 广义的 Talbot 效应. *光学学报*, 1985, 5(4): 331~335
- [4] 吕乃光, 傅里叶光学, 北京, 机械工业出版社, 1988, 96~100

- [5] 梁晓, 庄松林, Talbot 效应理论及应用. 光学仪器, 1986, (1): 1~7
- [6] O. Kafri, Noncoherent method for mapping phase objects. *Opt. Lett.*, 1980, 5(12): 555~557
- [7] Z. Karng, O. Kafri, Refractive index measuemnts by moire deflectometry. *Appl. Opt.*, 1982, 21(18): 3326~3328
- [8] Y. Nakano, K. Murata, Talbot interferometry for measuring the focal length of a lens. *Appl. Opt.*, 1985, 24(10): 3162~3166
- [9] I. Glatt, O. Kafri, Determination of the focal length of nonparaxial lenses by moire defletometry. *Appl. Opt.*, 1987, 26(13): 2507~2508
- [10] E. Karen, K. M. Kreske, O. Kafri, Universal method for determining the focal length of optical system by moire deflectometry. *Appl. Opt.*, 1988, 27(8): 1383~1385
- [11] L. M. Bernardo, O. D. D. Soares, Evaluation of the focal distance of lens by Talbot interferometry. *Appl. Opt.*, 1988, 27(2): 296~301
- [12] J. C. Bhattacharya, A. K. Aggarwal, Measurement focal length of a collimating lens using Talbot effect and moire technique *Appl. Opt.*, 1991, 30(31): 4479~4450
- [13] 姜锦虎, 陈炳泉, 王钦华等, 云纹技术测量透镜的焦距和折射率. 光学学报, 1987, 7(1): 67~73
- [14] 曹向群, 王东军, 金彤等, 用莫尔法测定焦距的精度分析. 光学技术, 1988, 21(2): 12~15

Analysis of Talbot image symmetry about Fourier spectrum plane and measurement of focal length

Tao Jingguang

(*Microscopic Amalysis Conter, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074*)

Liao Zhaoshu Yang Kuntao

(*Department of Optics, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074*)

(Received 14 April 1992)

Abstract

In this paper the relation of Talbot image of a grating and the focal plane of a lens is discussed,. The theory of Talbot images symmetry about Fourier spectrum plane is described. The focal length of lens was measured with this theory, this method is simple and the accuracy is high.

Key words Talbot effect, fourier spectrum plane, moire fringe.