

多光子 Jaynes-Cummings 模型场熵的演化

方卯发

(湖南师范大学物理系, 长沙 410081)

周 鹏

(*Institute de Estructura de la Mteria, CSIC, Madrid 28006, España*)

提 要

本文研究了多光子 Jaynes-Cummings (J-C) 模型场熵的演化性质、光场涨落的量度以及模型的有效性。

关键词 熵演化, 约化密度矩阵, 多光子 J-C 模型.

1 引 言

熵的理论在光学中的若干应用, 最先由 Gama^[1] 对于部分相干光场作了考察. 近年来, Barnett 和 Phoenix 等人^[2,3] 将熵理论应用于量子光学领域, 研究光场与物质相互作用时信息的关联与演化, 用熵作为量度量子光场关联与涨落的物理量, 显示出很大的优越性^[3], 文献[4] 讨论了原子与光场的多光子相互作用系统——多光子 J-C 模型的演化规律, 但没有涉及熵的演化. 本文将熵理论应用于多光子 J-C 模型的研究, 论述了光场与物质相互作用时熵演化的基本意义, 导出了多光子 J-C 模型场熵演化的一般计算公式, 借助于数值计算, 具体讨论了相干光场与二能级原子相互作用的多光子 J-C 模型场熵的演化性质、光场涨落的量度以及模型的有效性等.

2 J-C 模型熵演化的基本意义

在量子力学中, 熵被定义为:

$$S = - \text{Tr}(\rho \ln \rho), \quad (K = 1) \quad (1)$$

式中 ρ 为给定量子系统的密度算符, 玻尔兹曼常数 K 被定为 1, 如果 ρ 描述纯态, 则 $S = 0$, 如果 ρ 描述混合态, 则 $S \neq 0$. 因此, 熵 S 是系统偏离纯态的程度, 能够提供系统无序程度, 不确定程度的信息. 但是, (1) 式描述的是一个封闭系统中与时间无关的熵, 即当封闭系统初始处于纯态(混合态)时, 它在时间进程中将保持纯态(混合态). 但通常物理上感兴趣的是与外界有相互作用的开放系统, 或一个系统中有相互作用的各子系统. 显然, 描述全系统的密度算符没有告诉关于子系统动力学行为的信息. 需要一个描述子系统的约化密度统计算符, 通过该算符定义的熵可以反映子系统的动力学行为. 本文讨论光场与原子相互作用的多光子 J-C 模型的

场熵演化, 对于具有相互作用的光场-原子全系统, 其子系统的约化密度算符分别为:

$$\rho_f = Tr_a(\rho), \quad \rho_a = Tr_f(\rho),$$

式中 Tr_a 代表原子系统变量求迹运算, Tr_f 代表光场系统变量求迹运算. ρ 为光场与原子的密度算符, 作用在光场, 原子系统子空间上的算符 Q_f 和 Q_a 的平均值分别为:

$$\langle Q_f \rangle = Tr\{\rho_f Q_f\}, \quad \langle Q_a \rangle = Tr\{\rho_a Q_a\}. \quad (3)$$

为研究光场与原子相互作用的信息关联与演化以及光场的涨落, 本文采用 Shannon 的信息熵概念^[5], 定义场熵. 信息熵通过以下关系^[2]:

$$S(\rho_{f[a]}; Q_{f[a]}) = - \sum_{\alpha[\beta]} (\rho_{f[a]})_{\alpha\alpha[\beta\beta]} \ln (\rho_{f[a]})_{\alpha\alpha[\beta\beta]} \quad (4)$$

$$Q_f|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad Q_a|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$$

可以度量可观察量 $Q_{f[a]}$ 的涨落. 在光子数表象中, 光场的约化熵可定义为:

$$S(\rho_f; a^+a) = - \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\rho_f|n\rangle \ln \langle n|\rho_f|n\rangle \quad (6)$$

现在, 约化密度算符的求迹运算只在全系统的一部分(光场或原子的)变量上进行, ρ_f 或 ρ_a 不再是时间的单一函数, 相应地 $S(\rho_f)$ 或 $S(\rho_a)$ 不再与时间无关, 随着子系统熵的演化, 光场子系统能够由纯态向混合态演化, 反之亦然.

子系统熵 $S(\rho_f)$ 和 $S(\rho_a)$ 与光场-原子全系统的熵 $S(\rho)$ 有如下不等式^[2]:

$$|S(\rho_f) - S(\rho_a)| \leq S(\rho) \leq S(\rho_f) + S(\rho_a) \quad (7)$$

从上式可以看出: $S(\rho) \neq S(\rho_f) + S(\rho_a)$ 可以成立. 当光场-原子全系统处于纯态时, $S(\rho) = 0$, 但 $S(\rho_f)$ (或 $S(\rho_a)$) ≥ 0 , 此时 $S(\rho_f) = S(\rho_a)$, 光场与原子子系统的熵相等. 这个结果并不与熵的可加性矛盾, 因为在求光场与原子子系统的约化密度矩阵时, 忽略了光场与原子的相互关联效应, 丢失了包含在关联中的信息. 而熵正好能够量度这种信息量丢失的程度, 可以定义一个反映光场与原子关联信息量的指标:^[3]

$$\Delta S_c = S(\rho_f) + S(\rho_a) - S(\rho). \quad (8)$$

显然, 多光子 J-C 模型全系统处于纯态时, $S(\rho) = 0$, $S(\rho_f) = S(\rho_a)$, 光场与原子子系统相关程度最大: $\Delta S_c = 2S(\rho_f)$. 因此, 多光子 J-C 模型熵演化的主要意义在于: 一方面从(4)式可见: $S(\rho_f)$, $S(\rho_a)$ 是动力学变量 Q_f 与 Q_a 涨落的量度, 可提供多光子 J-C 模型系统的动力学行为信息; 另一方面从(8)式可知: $S(\rho_f)$, $S(\rho_a)$ 可度量光场与原子相互作用的信息关联.

3 多光子 J-C 模型场熵演化的一般计算公式

多光子 J-C 模型系统的哈密顿(Hamiltonian)在旋波近似下可以表示为:

$$H = \omega a^+a + \omega_0 \sigma_3 + \varepsilon(\sigma_+ a^k + a^{+k} \sigma_-), \quad (\hbar = 1) \quad (9)$$

式中 ω 为辐射场的频率, ω_0 为二能级原子的跃迁频率, ε 为辐射场与原子的耦合系数, k 为原子跃迁过程中吸收或发射的光子数. 系统的时间演化算符为:^[4]

$$U(t) = \exp(-iHt)$$

$$= \begin{pmatrix} \exp[-i(a^+a + k/2)\omega t][\cos ut - i(\Delta/2)\sin ut/u], & -i\varepsilon \exp[-i(a^+a + k/2)\omega t] a^k \sin vt/v \\ -i\varepsilon \exp[-i(a^+a - k/2)\omega t] a^{+k} \sin ut/u, & \exp[-i(a^+a - k/2)\omega t][\cos vt + i(\Delta/2)\sin vt/v] \end{pmatrix}$$

$$u = [(\Delta/2)^2 + \varepsilon^2 a^k a^{+k}]^{1/2}, \quad v = [(\Delta/2)^2 + \varepsilon^2 a^{+k} a^k]^{1/2}. \quad (10)$$

式中 $\Delta = \omega_0 - k\omega$ 为失谐量, 辐射场的约化密度算符为:

$$\rho_f(t) = Tr_a\{U(t)\rho(0)U^+(t)\} \quad (11)$$

式中, $\rho(0)$ 为初态全系统密度算符. 设在初始时刻辐射场为任意态, 约化密度算符为:

$$\rho_f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F(n)F^*(m) |n\rangle\langle m| \quad (12)$$

式中 $|n\rangle$ 为光子数本征态, $F(n)$ 为辐射场中具有 n 个光子的几率幅, 辐射场不同, $F(n)$ 的形式不同. 又设原子初始处于基态和激发态的迭加态, 约化密度算符为:

$$\rho_a(0) = \begin{pmatrix} |r_2|^2 & r_2 r_1 \\ r_1^* r_2^* & |r_1|^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

式中 r_2, r_1 分别为原子处于激发态和基态的几率幅, 满足 $r_2^2 + r_1^2 = 1$. 设初始时刻辐射场与原子无关联, 则 $\rho(0) = \rho_a(0) \otimes \rho_f(0)$, 将 $\rho(0)$ 代入(11)式, 并定义

$$P_f(t) = \langle n' | \rho_f(t) | n' \rangle \quad (14)$$

为辐射场的光子数分布函数, 经复杂的数学运算得到:

$$\begin{aligned} P_f(t) = & r_2^2 P(n) [\cos 2\Omega_n^+ t + (\Delta/2)^2 \sin^2 \Omega_n^+ t / \Omega_n^{+2}] \\ & + \varepsilon^2 r_2^2 P(n-K) (n! / (n-k)!) (\sin^2 \Omega_n^- t / \Omega_n^{-2}) \\ & + r_1^2 P(n) [\cos^2 \Omega_n^- t + (\Delta/2)^2 \sin^2 \Omega_n^- t / \Omega_n^{-2}] \\ & + \varepsilon^2 r_1^2 P(n+k) ((n+k)! / n!) (\sin^2 \Omega_n^+ t / \Omega_n^{+2}) \end{aligned} \quad (15)$$

在上式中, $\Omega_n^+ = [(\Delta/2)^2 + \varepsilon^2(n+k)!/n!]^{1/2}$, $\Omega_n^- = [(\Delta/2)^2 + \varepsilon^2 n!/(n-k)!]^{1/2}$, $P(n) = |F(n)|^2$, $P(n-k)$ 应满足:

$$P(n-k) \begin{cases} \neq 0 & n \geq k \\ = 0 & n < k \end{cases}$$

利用(6)、(14)式得到多光子 J-C 模型场熵的一般计算公式为:

$$S(\rho_f(t); a^+a) = - \sum_{n=0}^{\infty} P_f(t) \ln P_f(t). \quad (16)$$

式中 $P_f(t)$ 满足(15)式. 由于(15)、(16)式是由任意初态演化而来的, 同时考虑了失谐量 Δ , 辐射场与原子的耦合系数 ε 以及跃迁光子数 k 的影响. 因此(16)式反映了多光子 J-C 模型场熵的演化规律. 对具体问题, 只要选择 k 值, 根据初态时的 $P(n)$, r_2, r_1 , 就可以研究任意时刻场熵的演化.

4 相干光场与二能级原子的多光子相互作用时的场熵演化

设初始时刻原子处于基态, 则 $r_2 = 0, r_1 = 1$. 考虑共振情况, 则 $\Delta = 0$, 这样(16)式变为:

$$\begin{aligned} S(P_f(t); a^+a) = & - \sum_{n=0}^{\infty} \{ [P(n) \cos^2(n!/(n-k)!)^{1/2} \varepsilon t + P(n+k) \sin^2((n+k)!/n!)^{1/2} \varepsilon t] \\ & \times \ln [P(n) \cos^2(n!/(n-k)!)^{1/2} \varepsilon t + P(n+k) \sin^2((n+k)!/n!)^{1/2} \varepsilon t] \} \end{aligned} \quad (17)$$

当初始光场是相干光场时, 光子数几率分布为:

$$P(n) = P_c = \exp(-|\alpha|^2) |\alpha|^{2n} / n! \quad (18)$$

式中 $\alpha = n_c^{1/2} \exp(i\Phi)$, n_c 为初始相干光场的平均光子数, Φ 为 α 的相位角 ($0 \leq \Phi \leq 2\pi$). 由于得到(17)式的解析解很困难, 但借助于数值计算能形象地显示场熵的演化规律, 图 1 给出了当 $n_c = 20$, 跃迁光子数 k 分别为 1, 2, 3, 4 时, 相干光场熵的演化规律. 从图中可以看出: 场熵的演化具有振荡特性. 双光子 ($k = 2$) 跃迁时场熵的演化有较为明显的非等幅周期振荡, $\varepsilon t = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 处的峰值上还出现分叉振动, 单光子 ($k = 1$) 跃迁时场熵随时间的发展开始具有下降趋势, 演化呈现长周期调制, 而对于三光子以上的跃迁则场熵无明显的周期振荡, 但振

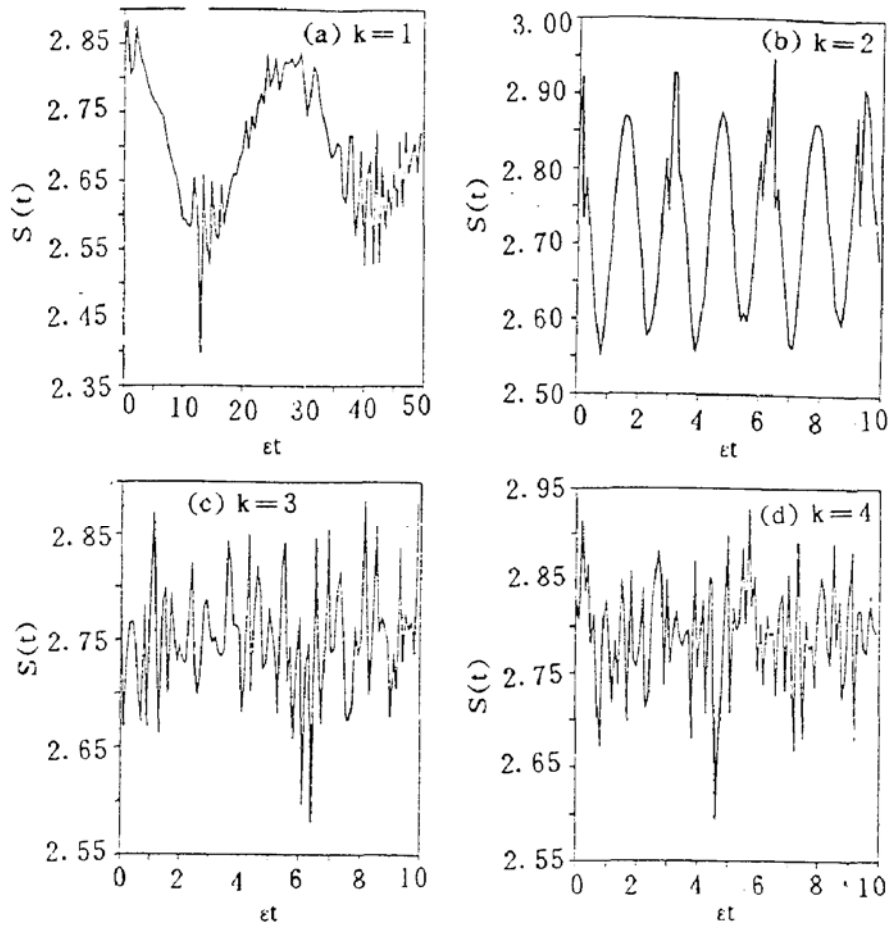


Fig. 1 Evolution of the field entropy with an initial coherent state with the mean photon number $n_c = 20$ and the atom initially ground state for (a) $k=1$; (b) $k=2$; (c) $k=3$; (d) $k=4$

荡的频率很高. 另一方面图 1 也暗示: 相干光场与原子耦合系数 ϵ 越大, 场熵演化的振荡频率越高. 结果还表明: 当初始平均光子数 n_c 增加时, 场熵演化振荡的周期规律明显增加.

5 讨 论

5.1 光场涨落的量度

光场的涨落可以由光场的熵或光子数的方差来量度, 下面讨论这两个统计参量在度量光场涨落时的差异. 初始处于基态的二能级原子与相干光场的 k 光子共振相互作用时, 光子数的方差为:

$$\begin{aligned}
 (\Delta n)^2 &= \text{Tr}_f[\rho_f(a^+a)^2] - \{\text{Tr}_f[\rho_f(a^+a)]\}^2 \\
 &= n_c^2 - n_c + 2 + \exp(-n_c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_c^n}{n!} (2n-2) \cos 2[n!/(n-k)!]^{1/2} \epsilon t \\
 &\quad - \{n_c - 1 + \exp(-n_c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_c^n}{n!} \cos 2[n!/(n-k)!]^{1/2} \epsilon t\}^2
 \end{aligned} \quad (19)$$

我们给出了 $n_c = 20, K = 1$ 和 2 时光子数方差的数值解, 如图 2 所示. 从图中可见, 光子数的方差也呈现与原子反转类似的崩溃回复现象, 与相应初始条件下的相干光场熵演化图 1(a) 和 (b) 进行比较, 发现: 对于 $k=1$ 的单光子跃迁, 场熵演化如图 1(a) 所示, 在初始时刻有一明显

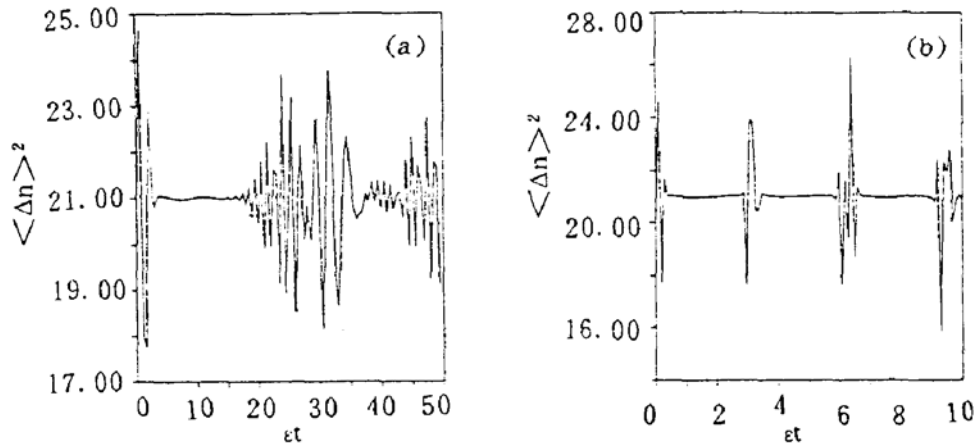


Fig. 2 Evolution of the photon number variance with an initial coherent state with the mean photon number $\bar{n}_c = 20$ and the atom initially ground state for (a) $k=1$; (b) $k=2$

的下降,此间光场与原子关联最小,有序度增加,涨落减小.但此时却对应在光子数方差图 2 (a)的崩溃区域,光子数方差反映不出这一光场涨落的减小;对于 $k=2$ 的双光子跃迁,虽然光子数方差的回复区域(图 2(b))对应在场熵演化的具有分叉振动的峰值位置,但崩溃区域却反映不出场熵演化“低峪”区域光场涨落的减小.这说明:在 J-C 模型光场中,对于光场涨落的量度,光子数方差不是一个好的统计参数,而场熵能灵敏地反映光场的涨落.这是因为场熵敏感于光场的高阶矩,而方差仅敏感于光场的二阶矩^[2]

5.2 模型的有效性

最近,Toor 和 Zubairy^[6]考察了双光子 J-C 模型有效哈密顿的适用性问题,其适用性条件为:

$$\bar{n} \gg 1, \quad \Delta' / \lambda \gg 4\bar{n}^2 \lambda / \pi \quad (20)$$

式中 \bar{n} 为场初始平均光子数, Δ' 为三能级系统中间能级偏离单光子共振的失谐量, $\lambda = \epsilon / \Delta'$. 在(20)式条件下,完全微观哈密顿近似可以过渡到有效哈密顿近似,但仍有一附加相因子差别.而该相因子只与场约化密度矩阵的非对角元有关^[6].这样当满足适用条件(20)式时,两种近似下的对角元是相同的.由于本文采用 Shannon 的信息熵概念定义场熵,只涉及场约化密度矩阵的对角元.因此本文讨论中的一个特例——双光子过程的场熵演化,如果满足(20)式,在两种近似下得到的结果是相同的.而文献[7]利用热力学熵概念,通过求解场约化密度矩阵本征值来确定场熵,包含了非对角元的影响.因此,即使满足(20)式适用条件,由两种近似下得到熵的结果仍有差别.对于 $k \geq 3$ 的多光子过程,要得到一个有普遍意义的精确哈密顿来确定有效哈密顿适用性条件很困难.事实上多光子有效哈密顿是由归纳推理得到的,对它的研究具有理论价值.

6 结 论

本文利用场的约化密度矩阵,求解了多光子 J-C 模型场熵的演化规律,具体讨论了二能级原子与相干光场的 k 光子相互作用时场熵的演化性质、光场涨落的量度以及模型的有效性.同样对其它光场情况,应用本文的结论也可进行研究,对此将另文报道.

参 考 文 献

- [1] H. Gamo, Matrix treatment of partial coherence. *Progress in Optics*, 1964, III:189~301
- [2] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight, Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance. *Ann. Phys. (N. Y.)*, 1988, 186(2):381~407
- [3] S. M. Barnett, S. J. D. Phoenix, Entropy as measure of quantum optical correlation. *Phys. Rev. A*, 1989, 40(5):2404~2409
- [4] 周 鹏, 彭金生, 多光子 J-C 模型的演化. *光学学报*, 1990, 10(9):837~844
- [5] C. E. Shannon, W. Weaver, The mathematical theory of communication. Illini Books Urbana, II, 1963
- [6] A. H. Toor, M. S. Zubairy, Validity of the effective Hamiltonian in the two-photon atom-field interaction. *Phys. Rev. (A)*, 1992, 44(7):4951~4959
- [7] S. J. D Phoenix, P. L. Knight, Periodicity, phase and entropy in models of two-photon resonance. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1990, 7(1):116~124

Evolution of field entropy for the multiphoton Jaynes-Comings model

FANG Maofa

(Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081)

ZHOU Peng

(Institute de Estructura de la Mteria, CSIC, Madrid 28006, España)

(Received 1 September 1992)

Abstract

In this paper, the evolution properties of the field entropy, the measure of light field fluctuations and validity of the multiphoton Jaynes-Comings model are studied.

Key words evolution of the field entropy, reduce density matrix, multiphoton Jaynes-Cummings model.