

在失谐简并四波混频中实现量子噪声完全压缩的方法

汪凯戈 王亚非 孙寅官
(北京师范大学物理系, 北京 100875)

提 要

讨论了在失谐简并四波混频中三种可能实现电磁场量子噪声完全压缩的方法。
关键词 简并四波混频, 压缩谱, 完全压缩.

1 引 言

光场量子噪声的压缩效应是近年来在量子光学领域中为理论和实验工作者所关注的课题之一,最近的研究结果表明,在涉及双光子作用的非线性过程中容易实现较好的压缩,这些过程有光参量振荡,双光子光学双稳,二次谐波产生和四波混频过程^[1~9].文献[6]讨论并计算了在共振条件下简并四波混频过程中光场噪声的压缩谱,并指出在一定条件下可以实现量子噪声的完全压缩.从实验和实际应用的角度出发,共振条件有时并不能保证.因此,有必要研究在失谐条件下,是否也存在完全压缩的可能性.

本文在文献[6]所建立的模型的基础上,讨论在失谐情况下,在简并四波混频中实现光场量子噪声完全压缩的方法,并且为计算压缩谱的数值结果所证实.

2 压缩谱的计算方法

简并四波混频过程的哈密顿量为^[6]

$$H = \sum_{i=1}^2 \hbar \Delta_i a_i^\dagger a_i + i\hbar E (a_1^\dagger - a_1) + i\hbar \frac{\kappa}{2} (a_1^2 a_2^{\dagger 2} - a_1^{\dagger 2} a_2^2) \quad (1)$$

式中 a_1 和 a_2 分别为腔内泵浦场和信号场的湮灭算符. E 为外场的振幅,可以定义为实数. κ 为正比于介质非线性极化率 $\chi^{(3)}$ 的耦合常数. Δ_i 为失谐参数,它定义为

$$\Delta_i = (\omega_i - \omega_0) / \gamma_i \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

式中 ω_0 为外场 E 的工作频率, ω_1 和 ω_2 分别为泵浦场和信号场的频率. γ_1 和 γ_2 分别为这两个场的损耗参量. 描述系统动力学行为的主方程为

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_{i=1}^2 \Lambda_i \rho \quad (3)$$

式中刘维算符 Λ_i 描述对应的腔内场的损耗

$$A_i \rho = \gamma_i \{ [a_i, \rho a_i^\dagger] + [a_i \rho, a_i^\dagger] \}, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

在 Glauber P 表示中, 主方程(3)精确地对应于 Fokker-Planck (F-P) 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} = & \left\{ -\mu \frac{\partial}{\partial A_1} [\bar{E} - (1 + i\Delta_1)A_1 - A_1^* A_2^2] - \frac{\partial}{\partial A_2} [-(1 + i\Delta_2)A_2 + A_1^2 A_2^*] \right. \\ & \left. + \frac{\kappa}{\gamma_2} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial A_1^2} A_1^2 - \mu \frac{\partial^2}{\partial A_1^2} A_2^2 \right) \right\} P + c. c. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma_2}} \alpha_1, \quad A_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma_1}} \alpha_2, \quad \bar{E} = \frac{E}{\gamma_1} \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma_2}}, \\ \tau = \gamma_2 t, \quad \mu = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \end{aligned} \quad (6)$$

式中 α_1 和 α_2 分别为算符 a_1 和 a_2 的期望值. $A_1, A_2, \bar{E}, \tau, \mu$ 为引入的无量纲变量. 场的期望值的动力学行为由半经典方程描述

$$\frac{1}{\mu} \frac{dA_1}{d\tau} = \bar{E} - (1 + i\Delta_1)A_1 - A_1^* A_2^2, \quad \frac{dA_2}{d\tau} = -(1 + i\Delta_2)A_2 + A_1^2 A_2^* \quad (7)$$

为了计算光场的压缩谱, 可将 F-P 方程(5)式围绕(7)式的静态解展开, 并只保留涨落变量的线性项

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\mathbf{q}, \tau) = \left\{ \sum_{i,j=1}^4 \frac{\partial}{\partial q_i} M_{ij} q_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} D_{ij} \right\} P(\mathbf{q}, \tau) \quad (8)$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \delta A_1 \\ \delta A_1^* \\ \delta A_2 \\ \delta A_2^* \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu(1 + i\Delta_1) & \mu A_2^2 & 2\mu A_1^* A_2 & 0 \\ \mu A_2^{*2} & \mu(1 - i\Delta_1) & 0 & 2\mu A_1 A_2^* \\ -2A_1 A_2^* & 0 & 1 + i\Delta_2 & -A_1^2 \\ 0 & -2A_1^* A_2 & -A_1^{*2} & 1 - i\Delta_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{D} = (\kappa/\gamma_2) \text{diag} (-\mu A_2^2, -\mu A_2^{*2}, A_1^2/\mu, A_1^{*2}/\mu) \quad (11)$$

式中 \mathbf{q} 为四分量矢量, 被定义为由四个涨落变量组成, \mathbf{M}, \mathbf{D} 为 4×4 漂移矩阵和扩散矩阵, A_1, A_2 为静态解.

协变矩阵 $\mathbf{S}(\bar{\omega})$ 由下式计算^[1,7,8]

$$\mathbf{S}(\bar{\omega}) = (\mathbf{M} + i\bar{\omega}I)^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{M}^T - i\bar{\omega}I)^{-1} \quad (12)$$

式中 I 为单位矩阵, \mathbf{M}^T 为 \mathbf{M} 的转置, $\bar{\omega} \equiv \omega/\gamma_2$. 泵浦场的压缩谱 $S_1(\bar{\omega})$ 和信号场的压缩谱 $S_2(\bar{\omega})$ 可由协变矩阵的矩阵元计算得

$$\begin{aligned} S_1(\bar{\omega}) &= \frac{\gamma_1}{2\kappa} \{ S_{12}(\bar{\omega}) + S_{21}(\bar{\omega}) + 2\text{Re}[S_{11}(\bar{\omega})e^{-2i\theta}] \} + \frac{1}{4}, \\ S_2(\bar{\omega}) &= \frac{\gamma_1}{2\kappa} \{ S_{34}(\bar{\omega}) + S_{43}(\bar{\omega}) + 2\text{Re}[S_{33}(\bar{\omega})e^{-2i\theta}] \} + \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (13)$$

(13)式前的系数 $\gamma_1/2\kappa$ 来源于三部分贡献的乘积: 第一个因子 $2\gamma_1(2\gamma_2)$ 来源于输出场和腔内

场之间的转换关系;第二个因子 $1/\gamma_2$ 是由于将 τ 还原成 t ;第三个因子 $\gamma_2/\kappa(\gamma_1/\kappa)$ 是由于将 $A_1(A_2)$ 还原成 $\alpha_1(\alpha_2)$. 相角 θ 是确定电磁场正交分量的任意相位因子.

3 实现完全压缩的几种可能性

电磁场涨落的完全压缩谱有如下形式

$$S(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 + 4} + \frac{1}{4} \quad (14)$$

在下述几种情况下,可以在失谐的简并四波混频过程中实现完全压缩.

3.1 在阈值时,真空信号场的完全压缩

方程(7)有平庸解

$$A_1 = \frac{\bar{E}}{1 + i\Delta_1}, \quad A_2 = 0 \quad (15)$$

由线性稳定性分析可知,这个解稳定的条件是

$$|A_1|^2 < \sqrt{1 + \Delta_2^2} \quad \text{或} \quad |\bar{E}|^2 < (1 + \Delta_1^2) \sqrt{1 + \Delta_2^2} \quad (16)$$

不等式的右边是信号场激发的阈值.在阈值和阈值以下,由于 $A_2 = 0$, 4×4 漂移和扩散矩阵可以分解为 2×2 的子矩阵

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

泵浦场的谱由 M_1 和 D_1 决定,由于 D_1 为零,因此泵浦模的涨落为散粒噪声.信号场的谱由 M_2 和 D_2 决定

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 + i\Delta_1 & -A_1^2 \\ -A_1^{*2} & 1 - i\Delta_1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \frac{\kappa}{\gamma_2} \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & A_1^{*2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

对于上式,不难用(12)式求出其 2×2 协变矩阵的解析表达式,再由(13)式可得到在阈值时 ($|A_1|^2 = \sqrt{1 + \Delta_2^2}$) 信号场的压缩谱

$$S_2(\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{\omega}^2(\bar{\omega}^2 + 4)} \{2(1 + \Delta_2^2) + \text{Re}[(2 + \bar{\omega}^2 - 2i\Delta_2)A_1^2 e^{-2i\theta}]\} + \frac{1}{4} \quad (19)$$

如果选择相角 θ 使在 $\bar{\omega} = 0$ 处有最大压缩,

$$e^{-2i\theta} = -\frac{S_{33}^*(0)}{|S_{33}(0)|} = -\frac{A_1^{*2}(1 + i\Delta_2)}{|A_1|^4} \quad (20)$$

将(20)式代入(19)式就可得到(14)式.因此,阈值时的信号场处在完全压缩的真空态.

3.2 当 $\gamma_2 \gg \gamma_1$ 时,信号场的近完全压缩

对于简并四波混频,泵浦和信号场均是双光子过程,因此可用文献[9]中的方法来求衰变为极限情况时压缩谱的近似解.例如在 $\gamma_2 \gg \gamma_1$ 极限下,压缩谱可明显地分为两部分,带宽为 γ_2 的宽带部分和带宽为 γ_1 的窄带部分,这两部分分别来自于信号场和泵浦场噪声的贡献.如果忽略噪声谱中窄带部分的细节,可令 $\delta A_1 = \delta A_1^* = 0$,这样,四分量 F - P 方程(8)式退化为二分量的方程,它的漂移和扩散矩阵为(18)式.由于在阈值以上,泵浦场的静态值保持为阈值时的值 $|A_1|^2 = \sqrt{1 + \Delta_2^2}$ 不变,因此,其压缩谱的计算同上小节完全相同,应为完全压缩谱(14)式,所

不同的是,这里描述在阈值以上,信号场已被激发;另外,本节的方法是忽略谱的窄带部分的近似解.

图 1 中的曲线 1、2、3、4 分别对应于 μ 值 1, 0.1, 0.01, 0.001 时由公式(13) 计算的压缩谱 $S_2(\bar{\omega})$. 失谐参数 $\Delta_1 = 1.0$, $\Delta_2 = 3.0$, 静态值为 $|A_2|^2 = 1.265$. 信号场 a_2 的正交分量的相角 θ 分别取各条谱的最佳压缩时对应的相角. 曲线 5 为由(14) 式给出的完全压缩谱. 由图可见,当 μ 减小时,谱的压缩程度越来越好. 如果忽略曲线 4 的接近 $\bar{\omega} = 0$ 的非常狭的那部分谱带,它已与曲线 5 几乎完全重合.

3.3 当 $\gamma_2 \ll \gamma_1$ 时泵浦场的近完全压缩

与上面讨论的情况恰好相反,在这种极限下,谱带中宽度为 γ_2 的窄带部分由信号场贡献. 如果只考虑谱的主体部分,可在线性 F-P 方程(8) 式中令 $\delta A_2 = \delta A_2^* = 0$, 不过,现在需要对时间 t 以 $1/\gamma_1$ 归一化,这样 2×2 的漂移和扩散矩阵为

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 + i\Delta_1 & A_2^2 \\ A_2^{*2} & 1 - i\Delta_1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \frac{\kappa}{\gamma_2} \begin{pmatrix} -A_2^2 & 0 \\ 0 & -A_2^{*2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

注意到 M_1, D_1 与 M_2, D_2 有相似的形式,容易写出泵浦场的压缩谱为

$$S_1(\omega') = [(1 + \Delta_1^2 - \omega'^2 - |A_2|^4)^2 + 4\omega'^2]^{-1} \{2|A_2|^4 + \text{Re}[-A_2^2(1 - \Delta_1^2 + \omega'^2 + |A_2|^4 - 2i\Delta_1)e^{-2i\theta}]\} + \frac{1}{4} \quad (23)$$

其中 $\omega' = \omega/\gamma_1$. 选择相角 θ 使得在 $\omega' = 0$ 处有最佳压缩

$$\exp(-2i\theta) = -\frac{S_{11}^*(0)}{|S_{11}(0)|} = \frac{A_2^{*2}}{|A_2|^2} \frac{1 - \Delta_1^2 + |A_2|^4 + 2i\Delta_1}{\sqrt{(1 - \Delta_1^2 + |A_2|^4)^2 + 4\Delta_1^2}} \quad (24)$$

将(24)式代入(23)式得到

$$S_1(\omega') = \frac{|A_2|^2}{(1 + \Delta_1^2 - |A_2|^4 - \omega'^2)^2 + 4\omega'^2} \left\{ 2|A_2|^2 - \frac{(1 - \Delta_1^2 + |A_2|^4)(1 - \Delta_1^2 + |A_2|^4 + \omega'^2) + 4\Delta_1^2}{\sqrt{(1 - \Delta_1^2 + |A_2|^4)^2 + 4\Delta_1^2}} \right\} + \frac{1}{4} \quad (25)$$

在共振时,由于 $\Delta_1 = 0$, 上式简化为

$$S_1(\omega') = -\frac{|A_2|^2}{(1 + |A_2|^2)^2 + \omega'^2} + \frac{1}{4} \quad (26)$$

这与文献[6] 结果相同,该文献指出在共振时完全压缩发生在不稳定性的临界点 $|A_2|^2 = 1$.

在失谐情况下,由线性稳定性分析可知,当 $\mu \rightarrow \infty$ 时,不稳定性的临界点为 $|A_2|^2 = \sqrt{1 + \Delta_1^2}$, 将它代入(25) 式即得到完全压缩谱(14) 式. 图 2 为根据(13) 式计算的泵浦场的压缩谱,频率标度为 ω' ; 失谐参数 $\Delta_1 = 1.0$, $\Delta_2 = 3.0$; 静态值为当 μ 趋于无穷大时发生不稳定的临界点 $|A_2|^2 = 1.414$. 当 μ 有限时,这一点是稳定的. 图中曲线 1、2、3、4 分别对应于 $\mu = 1, 10, 100, 1000$ 时泵浦场的压缩谱 $S_1(\omega')$, (13) 式中的相角 θ 分别取各条谱分布中最佳压缩时的相角. 曲线 5 仍为完全压缩谱. 当 μ 增大时,泵浦场的噪声谱越来越接近完全压缩谱.

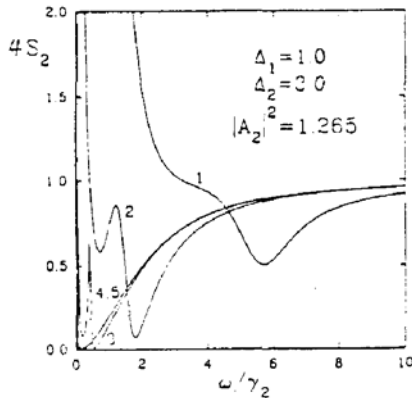


Fig. 1 The squeezing spectra $4S_2(\omega/\gamma_2)$ of the signal field when $\Delta_1=1.0$, $\Delta_2=3.0$, $|A_2|^2=1.265$. (The level of the shot noise is $4S_2=1$). The curves numbered as 1, 2, 3, 4 correspond to $\mu=1, 0.1, 0.01, 0.001$, respectively. The curve 5 is the spectrum of the perfect squeezing.

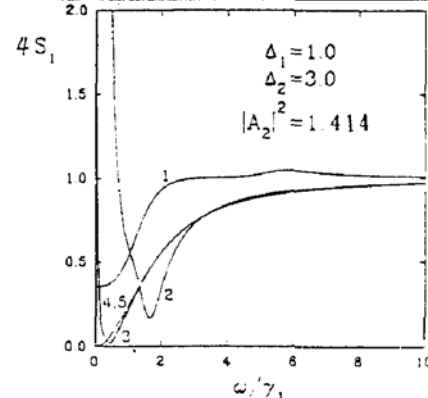


Fig. 2 The squeezing spectra $4S_1(\omega/\gamma_1)$ of the pump field when $\Delta_1=1.0$, $\Delta_2=3.0$, $|A_2|^2=1.414$. (The level of the shot noise is $4S_1=1$). The curves numbered as 1, 2, 3, 4 correspond to $\mu=1, 10, 100, 1000$, respectively. The curve 5 is the spectrum of the perfect squeezing.

参 考 文 献

- [1] M. J. Collett and D. F. Walls, Squeezing spectra for nonlinear optical systems. *Physical Review A*, 1985, **32**(5): 2887~2892
- [2] C. M. Savage, D. F. Walls, Squeezing by parametric oscillation and intracavity four-wave mixing. *J. O. S. A. B*, 1987, **4**(10):1514~1519
- [3] C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann *et al.*, Squeezing in detuned degenerate optical parametric oscillators. *Quantum Optics*, 1990, **2**:159~187
- [4] P. Galatola, L. A. Lugiato, M. Vadicchino *et al.*, Squeezing in two-photon optical bistability and laser with injective signal. *Optics Communications*, 1989, **69**(5,6):419~424
- [5] P. G-Fernandez, L. A. Lugiato, F. J. Bermejo *et al.*, Amplitude squeezing from second-harmonic generation in a laser cavity. *Quantum Optics*, 1990, **2**:49~69
- [6] L. A. Lugiato, Wang Kaige, The spectrum of squeezing in degenerate four-wave mixing. *Annalen der Physik*, 1990, **7 Folge, Band 47, Heft 7**, 539~554
- [7] B. Yurke, Use of cavities in squeezed-state generation. *Physical Review A*, 1984, **29**(1):408~410
- [8] M. J. Collett, C. W. Gardiner, Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification. *Physical Review A*, 1984, **30**(3):1386~1391
- [9] L. A. Lugiato, P. Galatola, L. M. Narducci, Universal normal-form description of squeezing and instabilities in two-photon processes. *Optics Communication*, 1990, **76**(3,4):276~286

Perfect squeezing of quantum noise in detuned degenerate four-wave mixing

WANG Kaige WANG Yafei SUN Yinguan

(Beijing Normal University, Beijing 100875)

(Received 2 November 1992)

Abstract

Three possible ways for the perfect squeezing of quantum noise of electro-magnetic field in the detuned degenerate four-wave mixing are discussed in this paper.

Key words degenerate four-wave mixing, squeezing spectrum, perfect squeezing.