

非等效折射近似的多量子阱波导色散关系

曹庄琪

(上海交通大学应用物理系, 上海 200030)

提 要

本文导出了任意折射分布的多量子阱波导芯子区域的转移矩阵, 用非等效折射近似得到了TE和TM两种偏振的色散关系. 理论的精确性经数值计算比较证明是完全可靠的.

关键词 多量子阱, 非等效折射率近似, 色散关系.

1 引 言

近年来, 对多量子阱波导的研究已获得日益增长的注意, 已有多篇论文讨论了多量子阱波导的传输特性^[1~4]. 但除了少数几篇数值研究论文^[5~6]以外, 极大多数研究采用的等效折射率近似. 即把多量子阱波导芯子部分的交变折射率用一平均折射率代替, 在此基础上再推导多量子阱波导的色散关系. 而且, 这些论文讨论的都是阶跃折射率多量子阱波导. 由于实际的多量子阱波导在制备过程中, 都要经受各种热过程, 因而量子阱的形状远不是阶跃的, 而往往是渐变的. 作者在文献[7]中研究了这种任意折射率分布的多量子阱波导, 但应用的仍是等效折射率方法. 本文在文献[7]基础上, 利用薄膜近似, 求出了任意折射率分布多量子阱波导芯子部分的转移矩阵. 本文在摒弃等效折射率概念的基础上, 由转移矩阵理论直接得到了多量子阱波导TE和TM两种偏振的色散关系. 这种方法比等效折射率近似更为直接和简单, 所得结果与简单三层平板波导的色散关系形式完全相同.

为检验本文理论的可靠性, 利用一对称的, 周期性多层波导结构的精确分析^[4], 经过数值计算, 表明本文所得结果与精确理论符合得极好.

2 转移矩阵

任意折射率分布的多量子阱波导如图1所示, 光沿 z 方向传输. 为方便计, 一个周期的交变层称为多量子阱波导的基, 基由“垒”和“阱”组成, 其厚度分别为 a 和 b , 基的长度 $\Lambda = a + b$. 多量子阱波导芯子层的总层度 $\omega = N\Lambda + a$, 而 N 为周期数. 图中 n_0 和 n_3 分别为衬底和覆盖层的折射率, n_1 和 n_2 分别代表基的折射率极大值和极小值. 函数 $n(x)$ 代表基的折射率分布.

为求多量子阱波导芯子部分的转移矩阵, 把周期 Λ (基的长度)分成 l 等分, 每一等分的宽度设为 h , 则有 $x_i = lh = \Lambda$. 根据转移矩阵理论^[7], 一般地, 第 i 个小区域的转移矩阵可写为

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i h & \frac{f_i}{\alpha_i} \sin \alpha_i h \\ -\frac{\alpha_i}{f_i} \sin \alpha_i h & \cos \alpha_i h \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, l)$$

$$f_i = \begin{cases} 1 & TE(\text{模}) \\ n^2(\chi_i) & TM(\text{模}) \end{cases} \quad \alpha_i = [k^2 n^2(\chi_i) - \beta^2]^{1/2}$$

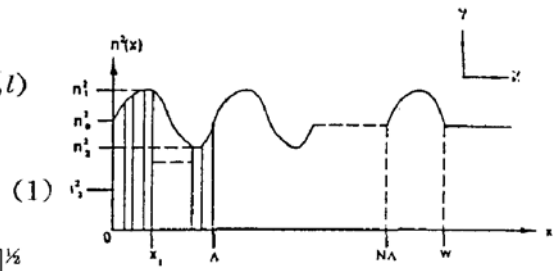


Fig. 1 The MQW waveguide with arbitrary refractive index profile

式中 β 为沿 z 方向和传播常数, 波数 $k = \omega/c$, ω 为角频率, 而 c 为真空中的光速.

如果 $kn(\chi_i) > \beta$, 则 $\alpha_i > 0$, 表明波动方程有振荡形式的解; 而当 $kn(\chi_i) < \beta$ 时, 有衰减解, 这时只要用 $j\alpha'$ 代替 α (j 为虚数单位), 并利用恒等式 $\cos(j\alpha' h) = \cosh(\alpha' h)$, $\sin(j\alpha' h) = j\sinh(\alpha' h)$ 则(1)式仍然成立. 若波导芯子层的宽度是确定的, 则当周期数 N 增加时, A , 从而 h 必然变小. 因而必有 $\alpha h \ll 1$. 因此可把(1)式中的三角函数展开成幂级数. 若取二级近似, 则(1)式改写为:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\alpha_i h)^2 & f_i h \\ -\frac{\alpha_i^2}{f_i} h & 1 - \frac{1}{2}(\alpha_i h)^2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + f_i h \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\alpha_i^2}{f_i} h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(\alpha_i h)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

(4)式右边第一项是 M_i 的主项, 第二、三项是一阶小量, 而第四项是二阶小量. 为简单计, 记

$$M_i = E + (f_i h) \cdot A - \left(\frac{\alpha_i^2}{f_i} h\right) \cdot B - \frac{1}{2}(\alpha_i h)^2 \cdot E \quad (4)$$

式中 E 为单位矩, A 和 B 均为仅有一个单位矩阵元的简单矩阵.

一个基的转移矩阵由下式给出:

$$M(\Lambda) = M_l M_{l-1} \dots M_2 M_1 \\ \cong E^l + \sum_i (f_i h) (E^{i-1} \cdot A \cdot E^{l-i}) - \sum_i \left(\frac{\alpha_i^2}{f_i} h\right) (E^{i-1} \cdot B \cdot E^{l-i}) \\ - \frac{1}{2} \sum_i (\alpha_i h)^2 \cdot E^l + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ (i \neq j)}} (f_i h) (f_j h) (E^{i-1} \cdot A \cdot E^{j-i-1} \cdot A \cdot E^{l-j}) \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ (i \neq j)}} \left(\frac{\alpha_i^2}{f_i} h\right) \left(\frac{\alpha_j^2}{f_j} h\right) (E^{i-1} \cdot B \cdot E^{j-i-1} \cdot B \cdot E^{l-j}) \\ - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ (i \neq j)}} (f_i h) \left(\frac{\alpha_j^2}{f_j} h\right) (E^{i-1} \cdot A \cdot E^{j-i-1} \cdot B \cdot E^{l-j}) \\ - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \\ (i \neq j)}} \left(\frac{\alpha_i^2}{f_i} h\right) (f_j h) (E^{i-1} \cdot B \cdot E^{j-i-1} \cdot A \cdot E^{l-j}), \quad (5)$$

式中右边第一项是 $M_i (i = 1, 2, \dots, l)$ 矩阵中 l 个单位矩阵的乘积; 第二、三、四项分别是 $(l-1)$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的一个 M_i 矩阵中第二、三、四项相乘并对 i 求和所得; 第五、六、七、八项来自于 $(l-2)$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的两个 M_i 矩阵中的 A 或 B 矩阵相乘度对 i 和 j 求和所得, 其中的系数 $1/2$ 为重复求和所引起.

由矩阵 E 、 A 和 B 的性质, 容易得到

$$\left. \begin{aligned} E^i &= E, & E^{i-1} \cdot A \cdot E^{i-1} &= A, & E^{i-1} \cdot B \cdot E^{i-1} &= B, \\ E^{i-1} \cdot A \cdot E^{j-i-1} \cdot B \cdot E^{i-j} &= AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & E^{i-1} \cdot B \cdot E^{j-i-1} \cdot A \cdot E^{i-j} &= BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ E^{i-1} \cdot A \cdot E^{j-i-1} \cdot A \cdot E^{i-j} &= AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & E^{i-1} \cdot B \cdot E^{j-i-1} \cdot B \cdot E^{i-j} &= BB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

因此(5)式成为

$$\begin{aligned} M(\Lambda) &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \sum_i (\alpha_i h)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} (f_i h) \left(\frac{\alpha_j^2 h}{f_j} \right) & \sum_i (f_i h) \\ - \sum_i \left(\frac{\alpha_i^2 h}{f_i} \right) & 1 - \frac{1}{2} \sum_i (\alpha_i h)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} (f_i h) \left(\frac{\alpha_j^2 h}{f_j} \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (f_i h) \left(\frac{\alpha_j^2 h}{f_j} \right) & \sum_i (f_i h) \\ - \sum_i \left(\frac{\alpha_i^2 h}{f_i} \right) & 1 - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (f_i h) \left(\frac{\alpha_j^2 h}{f_j} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

其中, 第二个矩阵中的求和包括 $i = j$ 的情况. 在 $h \rightarrow 0$ 时, (7) 式中的求和可用积分代替, 在这种情况下, 对 TE 模, 有

$$M(\Lambda) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \int_0^A dx \cdot \int_0^A [k^2 n^2(\chi) - \beta^2] dx & \int_0^A d\chi \\ - \int_0^A [k^2 n^2(\chi) - \beta^2] d\chi & 1 - \frac{1}{2} \int_0^A dx \cdot \int_0^A [k^2 n^2(\chi) - \beta^2] dx \end{bmatrix} \quad (8)$$

对 TM 模, 有

$$M(\Lambda) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \int_0^A n^2(\chi) d\chi \cdot \int_0^A \frac{k^2 n^2(\chi) - \beta^2}{n^2(\chi)} d\chi & \int_0^A n^2(\chi) d\chi \\ - \int_0^A \frac{k^2 n^2(\chi) - \beta^2}{n^2(\chi)} d\chi & 1 - \frac{1}{2} \int_0^A \frac{k^2 n^2(\chi) - \beta^2}{n^2(\chi)} d\chi \cdot \int_0^A n^2(\chi) d\chi \end{bmatrix} \quad (9)$$

根据 Floquet 定理^[8], 在多量子阱波导中传输的横向 (x 向) 传播常数 k 满足以下条件:

$$\cos K\Lambda = \frac{1}{2} \text{Tr} M(\Lambda) \quad (10)$$

式中“Tr”代表矩阵的迹. 对 TE 模, 有

$$\cos K\Lambda = 1 - \frac{1}{2} \int_0^A dx \cdot \int_0^A [k^2 n^2(\chi) - \beta^2] dx \quad (11)$$

当 $N \gg 1$ 时, (11) 式右边的第二项可作为小量处理, 于是可得

$$\sin K\lambda = (1 - \cos^2 K\Lambda)^{1/2} \cong \left(\int_0^A dx \cdot \int_0^A [k^2 n^2(x) - \beta^2] dx \right)^{1/2} \quad (12)$$

把(11)、(12)两式代入(8)式, 得到

$$M(\Lambda) = \begin{bmatrix} \cos K\Lambda & \frac{1}{\eta} \sin K\Lambda \\ -\eta \sin K\Lambda & \cos K\Lambda \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\eta = \left(\int_0^A [k^2 n^2(x) - \beta^2] dx / \int_0^A ds \right)^{1/2} \quad (14)$$

利用切比雪夫多项式^[9],相应于多量子阱波导芯子部分的转移矩阵可写为如下形式:

$$M^N(\Lambda) = \begin{bmatrix} \cos(NK\Lambda) & \frac{1}{\eta} \sin(NK\Lambda) \\ -\eta \sin(NK\Lambda) & \cos(NK\Lambda) \end{bmatrix} \quad (15)$$

采用类似的步骤,可以证明,(15)式同样满足 TM 模的情况,不过, $K\Lambda$ 和 η 由下列两式定义:

$$\cos K\Lambda = 1 - \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda} n^2(x) dx \cdot \int_0^{\Lambda} \frac{k^2 n^2(x) - \beta^2}{n^2(x)} dx, \quad (16)$$

$$\eta = \left[\int_0^{\Lambda} \frac{k^2 n^2(x) - \beta^2}{n^2(x)} dx / \int_0^{\Lambda} n^2(x) dx \right]^{1/2}. \quad (17)$$

3 色散关系

根据转移矩阵理论,或利用电磁场边界条件,任意折射率分布的多量子阱波导的色散关系由下列方程给出.对 TE 模

$$\begin{bmatrix} p & 1 \end{bmatrix} \cdot M^N(\Lambda) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

对 TM 模

$$\begin{bmatrix} p/n_0^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot M^N(\Lambda) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ q/n_3^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

$$p^2 = \beta^2 - k^2 n_0^2 \quad q^2 = \beta^2 - k^2 n_3^2 \quad (20)$$

经过几步简单的代数运算,方程(18)和(19)分别变为

$$\tan(NK\Lambda) = \frac{p+q}{\eta(1-pq/\eta)} \quad (21)$$

$$\tan(NK\Lambda) = \frac{p/n_0^2 + q/n_3^2}{\eta[1-pq/(n_0^2 n_3^2 \eta)]} \quad (22)$$

考虑到两种偏振态下参量 η 的不同定义,可以看出,(21)和(22)式与简单三层平板波导的色散关系具有完全相同的形式.由此得出,方程(21)和(11)、(14)两式完全描述了多量子阱波导的 TE 模,而方程(22)和(16)、(17)两式完全定义了多量子阱波导的 TM 模.一旦确定了波导的参数,该波导的传播数便可方便地确定.

4 数值计算结果

为了证明所得公式的可靠性,考虑一个简单的阶跃折射率分布的多量子阱波导.这个结构的精确色散关系由 Lenz 和 Salzman^[4]所建立.两种理论的数值计算结果比较如图 2 所示.本文数值计算的是有效折射率 β/k 对光波长 λ 的依赖关系,所采用的 GaAs/GaAlAs 多量子阱波导的典型参数为 $n_1 = 3.50$, $n_2 = 3.20$, $n_3 = 3.30$, $n_0 = 1.0$, $w = 1 \mu\text{m}$, $a = b = w/(2N)$

由图 2 可见,对 $N = 10$,有效折射率的相对误差小于千分之一,而当 $N = 100$ 时,两种结果几乎完全符合.根据本文的分析,容易看出,影响理论精确度的主要参量是 $K\Lambda$.在 $K\Lambda \ll 1$ 的情况下,本文理论能给出满意的结果,这与薄膜近似的要求是自洽的.对于实际的多量子阱波导, N 一般远大于 10,故完全可利用本文所得数值结果计算.尤其对渐变型折射率分布的多量子阱波导,本文有明确的指导意义.

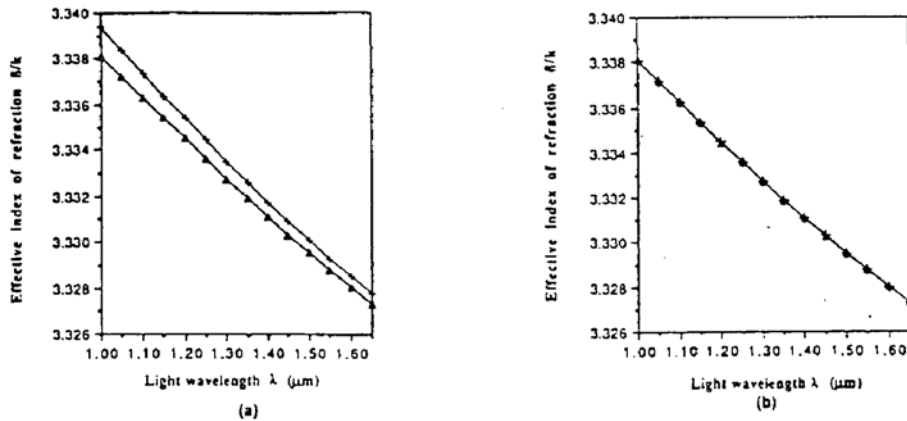


Fig. 2 Effective index of refraction β/k versus the light wavelength for a step-index MQW waveguide calculated by two different theories in the case of (a) $N = 10$, (b) $N = 100$, Cross: exact theory; triangle: present theory

参 考 文 献

- [1] S. Ohke, T. Vineda, Y. Cho, Optical waveguides using GaAs-Al_xGa_{1-x}As multiple quantum well. *Opt. Commun.*, 1985, **58**(4): 235~239
- [2] Y. F. Li, J. W. Y. Lit, General formulas for the guiding properties of a multilayer slab waveguide. *J. O. S. A.*, 1987, **A4**(4): 671~677
- [3] I. M. Skinner, R. Shail, B. L. Weiss, Modal propagation within MQW waveguides. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1989, **QE-25**(1): 6~11
- [4] G. Lenz, J. Salzman, *J. Lightwave Technol.*, 1990, **8**(12): 1803~1809
- [5] A. K. Ghatak, K. Thagarajam, M. R. Shenoy, *J. Lightwave Technol.*, 1987, **5**(5): 660~667
- [6] B. L. Weiss, A. P. Zhao, *IEEE Photonics Technol. Lett.*, 1990, **2**(8): 801~803
- [7] Z. Q. Cao, C. Hu, G. L. Jin, *J. O. S. A.*, 1991, **B8**(12): 2519~2522
- [8] See, for example, R. A. Smith, *Wave Mechanics of Crystalline Solid*. London: Chapman & Hall, 1961.
- [9] M. 玻恩, E. 沃耳夫, 光学原理. 北京: 科学出版社, 1978 年

Dispersion relations of multiple quantum well waveguides in the approximation of non-equivalent refractive index

CAO Zhuangqi

(Department of Applied Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

(Received 19 October 1992; revised 30 November 1992)

Abstract

Dispersion relations for TE and TM modes of a multiple quantum well (MQW) waveguide with an arbitrary refractive index profile are derived in the approximation of non-equivalent refractive index with the help of the transfer matrix technique. The accuracy of the theory is examined by comparison with an exact analysis for a step-index MQW waveguide.

Key words multiple quantum well, approximation of non-equivalent refractive index, dispersion relation.