第 13 卷 第 9 期
1993 年 9 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 13, No. 9
September, 1993

高阶贝塞耳光束及其传输特性的研究*

吕百达 张彬 蔡邦维
(四川大学光电科学技术系,成都 610064)
杨成龙
(中国工程物理研究院流体物理研究所,成都 610003)

提 要

本文首次提出了高阶贝塞耳(Bassel)光束的概念,并详细研究了高阶贝塞耳光束通过变换矩阵为$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$光学系统的传输特性.

关键词 高阶贝塞耳光束, 无衍射特性, 传输方程, 光束变换器.

1 引 言

自 Rochester 大学的 Durnin 和 Eberly 等人首次报道贝塞耳光束的演示性实验以来[1],由于这类光束在理论上具有“无衍射”的奇异特性和实践上十分诱人的应用前景,国际上迅速掀起对贝塞耳光束、贝塞耳-高斯光束和 Weber 光束等的研究热潮. 相继有不少理论和实验研究结果报道[1~6],弄清了贝塞耳光束的基本概念和无衍射的实质,以及实现贝塞耳光束的方法. 但是迄今有关的讨论都是就场函数为零阶贝塞耳光束进行的,无论从数学上或物理上的分析都有理由认为高阶贝塞耳光束可能存在. 本文提出和讨论高阶贝塞耳光束的概念,并对高阶贝塞耳光束通过由 ABCD 变换矩阵表征一般光学系统的传输特性进行较为详细的研究.

2 高阶贝塞耳光束

从场的波动方程

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E(r,\theta,z,t) = 0, \tag{1}$$

出发(式中Δ为拉普拉斯算子,c为光速,r,θ,z分别为径向、角向和轴向坐标,t为时间,E为场函数),在柱坐标下采用分离变数法,按数理方程中的标准步骤,容易证明,形如

$$\begin{aligned} E(r,\theta,z,t) &= E(r,\theta,z)\exp(-i\omega t) \\ &= J_m(\alpha r)\exp(im\theta)\exp[i(\beta z-\omega t)], \end{aligned} \tag{2}$$

的函数是波动方程(1)式的一个特解,式中J_m为m阶贝塞耳函数(本文限于讨论m为正整数,$m = 0,1,2,\cdots$情况),ω为圆频率,而

收稿日期:1992 年 4 月 27 日; 收到修改稿日期:1993 年 6 月 8 日
* 该项工作得到 863 课题的资助.

$$\alpha^2 + \beta^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{3}$$

k 为波数. 作者称满足(2) 式场分布的光束为 m 阶贝塞耳光束. 当 $o < \alpha \leqslant \omega/c$ 时,由(2)式决定的横平面上光强*

$$I(r,\theta,z,) = |J_m(\alpha r)|^2, \tag{4}$$

与传输距离 z 无关,因而有"无衍射"特性. 显然,与零阶贝塞耳光束一样,高阶贝塞耳光束也是非平方可积的,因此理想无衍射高阶贝塞耳光束须具有无限大的能量,不可能构造出来,但截断高阶贝塞耳光束(truncated higher-order Bessel beams)物理上是有可能实现的. 在(2)式中令 $m = 0$

$$E(r,z,t) = J_0(\alpha r)\exp[i(\beta z - \omega t)], \tag{5}$$

这即零阶贝塞耳光束,而当 $m = 1$ 时

$$E(r,\theta,z,t) = J_1(\alpha r)\exp(i\theta)\exp[i(\beta z - \omega t)] \tag{6}$$

为一阶贝塞耳光束. 由柱函数的理论知一阶贝塞耳光束场分布的振幅衰减特性, $r = 0$ 的中心处是一个暗斑,第一极大值在 $r \approx 1.8/\alpha$ 处,分布在各瓣上的能量也可用数值积分方法求出来. 对于 $m = 2,3,\cdots$ 可作类似讨论.

3　高阶贝塞耳光束的传输特性

3.1　B≠0 情况

现在研究在 $z = 0$ 处场函数 $E(r,\theta,z = 0)$ 为(2) 式的高阶贝塞耳光束通过变换矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的一般光学系统的传输特性. Collins 公式[7]在柱坐标下可写为

$$E_2(r_2,\theta_2,z_2) = -\frac{i}{\lambda B}\exp(ikz_2)\int_0^{+\infty} r_1 dr_1 \int_0^{2\pi} d\theta_1 E_1(r_1,\theta_1,z_1 = 0)$$
$$\exp\{\frac{ik}{2B}[Dr_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1) + Ar_1^2]\} \tag{7}$$

利用贝塞耳函数的下述关系式[8]

$$\left.\begin{aligned} & e^{iu\cos\theta} = J_0(u) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(u)\cos n\theta \\ & \int_0^{+\infty} x\, e^{-\beta x^2} J_m(\alpha x)J_m(\gamma x)dx = \frac{1}{2\beta}\exp(-\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{4\beta})\mathrm{I}_m(\frac{\alpha\gamma}{2\beta}) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式中 Im 为 m 阶虚宗量贝塞耳函数,且

$$\mathrm{Im}(x) = e^{-\frac{m\pi i}{2}} J_m(x\, e^{\frac{\pi i}{2}}) \qquad (-\pi < \arg x \leqslant \pi/2) \tag{9}$$

将

$$E_1(r_1,\theta_1,0) = J_m(\alpha r_1)\exp(im\theta_1) \tag{10}$$

代入(7)式,注意到 m 为正整数,略去冗长的积分计算过程,最后可将结果整理为

$$E_2(r_2,\theta_2,z_2) = \frac{1}{A}\exp\left[ikz_2\left(1 - \frac{\alpha^2 B}{2k^2 Az_2}\right)\right]\exp(ikr_2^2\frac{D - 1/A}{2B})\exp(im\theta_2)J_m(\frac{\alpha r_2}{A}), \tag{11}$$

---

* 若(2)式写为 $E(r,\theta,z,t) = J_m(\alpha r)\exp[i(\beta z - \omega t)]\begin{cases}\cos m\theta \\ \sin m\theta\end{cases}$,则 $I(r,\theta,z) = |J_m(\alpha r)|^2\begin{cases}\cos^2 m\theta \\ \sin^2 m\theta\end{cases}$ 亦与 z 无关

这即高阶贝塞耳光束通过 $B \neq 0$ 光学系统的传输方程. 由(10)式可知:

1) 高阶贝塞耳光束通过变换矩阵为$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的光学系统后,仍为同阶贝塞耳光束,但振幅为原光束的 $1/A$, J_m 的宗量变为 $\alpha r_2/A$, 且与 z_2 和 r_2 有关位相项都有变化,当 $AD = 1$ 时位相的径向调制项为零.

2) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 时,即自由空间中传输情况有

$$E_2(r_2,\theta_2,z_2) = \exp\left[ikz_2\left(1 - \frac{\alpha^2}{2k^2}\right)\right]\exp(im\theta_2)J_m(\alpha r_2) \tag{12}$$

3) m=0 时

$$E_2(r_2,\ z_2) = \frac{1}{A}\exp\left[ikz_2\left(1 - \frac{\alpha^2 B}{2k^2 A z_2}\right)\right]\exp\left(ikr_2^2\frac{D - 1/A}{2B}\right)J_0\left(\frac{\alpha r_2}{A}\right), \tag{13}$$

这与文献[5]的结果是一致的.

3.2 B=0 情况

当 $B = 0$ (成像光学系统)时,在直角坐标下把 Collins 公式写为

$$E_2(x_2,y_2,z_2) = \left(-\frac{i}{\lambda B}\right)\exp(ikz_2)\exp\left[\frac{ikC}{2A}(x_2^2 + y_2^2)\right] \cdot \iint E_2(x_1,y_1)\exp\left\{\frac{ikA}{2B}\left[\left(x_1 - \frac{x_2}{A}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{y_2}{A}\right)^2\right]\right\}dx_1dy_1 \tag{14}$$

当 $B \to 0$ 时利用 δ 函数公式 $\delta(x,y) = \lim\limits_{N\to\infty} N^2\exp[-N^2\pi(x^2 + y^2)]$, (14)式化为

$$E_2(x_2,y_2,z_2) = \frac{1}{A}\exp(ikz_2)\exp\left[\frac{ikC}{2A}(x_2^2 + y_2^2)\right]E_1\left(\frac{x_2}{A},\frac{y_2}{A}\right) \tag{15}$$

将(15)式化为柱坐标形式后把(10)式代入得

$$E_2(x_2,y_2,z_2) = \frac{1}{A}\exp(ikz_2)\exp\left[\frac{ikC}{2A}r_2^2\right]\exp(im\theta_2)J_m\left(\frac{\alpha r_2}{A}\right) \tag{16}$$

(16)式为高阶贝塞耳光束通过 $B = 0$ 光学系统的传输方程. 特别是对 $m = 0$ 的零阶贝塞耳光束,由(16)式可得

$$E_2(r_2,z_2) = \frac{1}{A}\exp(ikz_2)\exp\left(\frac{ikC}{2A}r_2^2\right)J_0\left(\frac{\alpha r_2}{A}\right) \tag{17}$$

(16)式虽然可直接从(11)式中令 $B = 0$,并利用 $AD - BC = 1$ 关系得出,但在一般情况下,直接从 $B = 0$ 的 Collins 公式出发的推导是较为严格的方法.

4 讨 论

本文提出的高阶贝塞耳光束概念有充分的数学和物理依据. 由物理角度来看,从经典电磁场理论知道,满足波动方程的形如(2)式的柱面电磁波解是存在的,因此在光频段也可能实现. 从光束变换的观点来看[9],则需要设计一个适当的贝塞耳光束变换器,它能将入射光束的场振幅和位相进行变换以得到所需阶次(或其迭加)的贝塞耳光束. 虽然不同阶次的贝塞耳光束有不同的场分布,但我们在较为普遍的情况下证明了,它们通过变换矩阵为$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的光学系统时,都遵从相同的变换规律(11 式 $B \neq 0$,(16) 式 $B = 0$),且保持同阶贝塞耳函数形式不变.

这一分析方法可推广用于研究 Weber 光束、贝塞耳-高斯光束等的传输变换问题,例如,对

零阶 Weber 光束[4]

$$E(r,z,t) = E(r)\exp[i(\beta z - \omega t)] \tag{18}$$

$$E(r) = \begin{cases} Y_0(\alpha r) & Y_0(\alpha r) > -1 \\ -1 & Y_0(\alpha r) \leqslant -1 \end{cases} \tag{19}$$

式中 $Y_0(\alpha r)$ 为零阶 Weber 函数. 易证它通过 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 光学系统的变换满足

$$\left.\begin{aligned} E_2(r_2,\theta_2) &= \frac{1}{A}\exp\left[ikz_2\left(1-\frac{\alpha^2 B}{2k^2 A z_2}\right)\right]\exp\left(ikr_2^2\frac{D-1/A}{2B}\right)Y_0\left(\frac{\alpha r_2}{A}\right), \quad \left(\begin{matrix} B \neq 0 \\ Y_0\left(\frac{\alpha r_2}{A}\right) > -1 \end{matrix}\right) \\ E_2(r_2,z_2) &= \frac{1}{A}\exp(ikz_2)\exp\left(\frac{ikC}{2A}r_2^2\right)Y_0\left(\frac{\alpha r_2}{A}\right). \quad \left(\begin{matrix} B = 0 \\ Y_0\left(\frac{\alpha r_2}{A}\right) > -1 \end{matrix}\right) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

最后，尚需说明的是：

(1) 与零阶贝塞耳光束相类似[5]，(11)式中与 z_2 有关的位相因子 $kz_2\left(1-\frac{\alpha^2 B}{2k^2 A z_2}\right)$ 中略去了高阶项，这在本质上是由 Collins 公式受菲涅尔近似条件限制引起，当讨论诸如高阶贝塞耳光束的干涉之类问题时，是应当注意的.

(2) 与文献[5]相似，在本文的推导中设 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 光学系统具有无限大孔径. 实际的光学系统因有限孔径(光栏效应)会对贝塞耳光束的传输产生影响. 由于贝塞耳光束与高斯光束相比较，有不同的场分布，光栏对传输特性(包括轴上和横向光强分布，最大准直范围等)的影响也不同. 为篇幅所限，对有限束宽贝塞耳光束传输特性的研究将另文报道[10].

本文作者之一(吕百达)曾就贝塞耳光束有关问题与邓锡铭教授、范滇元教授进行富有启发性的讨论，特此一并致谢！

参 考 文 献

[1] J. Durnin, J. J. Miceli, J. H. Eberly, Diffraction-free beam. *Phys, Rev, Lett.*, 1987, **58**(15): 1499～1501

[2] J. Durnin, Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory. *J. O. S. A(A)*., 1987, **4**(4): 651～654

[3] H. S. Lee, B. W. Stewart, D. Will *et al.*, Holographic Bessel beam amplification. *Appl. Phys. Lett.*, 1991, **59**(24): 3096～3098

[4] L. Vicari, Truacation of non-diffraction beams. *Opt. Commun.*, 1989, **70**(4): 263～266

[5] F. Blois, L. Vicari, Bessel beam propagation through axisymmetic optical systems. *J. Optics.*, 1991, **22**(1): 3～5

[6] P. L. Overfelt, C. S. Kerrey, Comparison of the propagation characterstics of Bessel Bessel-Gauss and Gaussian beams diffracted by a circular aperture. *J. O. S. A. (A)*., 1991, **8**(5): 732～745

[7] S. A. Collins, Jr., Lens-system diffraction integral wriffen in terms of matrix optics. *J. O. S. A.*, 1970, **60**(9): 1168～1177

[8] Edited by A. Erdelyi, *Tables of Integral Transformations*, Vol. 2. 1st Edition, 1954, McGraw-Hill Book Company New York Toronto London, 5～92

[9] R. Herioski, S. Marshall, R. Amtors, Gaussian beam ray-equivalent modeling and optical design. *Appl. Opt.*, 1983, **28**(8): 1168～1174

[10] 吕百达，张 彬，蔡邦维， 有限束宽无衍射光束传输特性的研究(即将发表)

Studies of higher-order Bessel beams and their propagation characteristics

LÜ Baida ZHANG Bin CAI Bangwei
(*Department of Opto-Electronic Science and Technology*, *Sichuan University*, *Chenggu* 610064)
YANG Chenglong
(*Institute of Fluid Physics*, *CAEP*, *Chengdu* 610003)
(Received 27 April 1992; revised 8 June 1993)

Abstract

In this paper, a concept of the higher-order Bessel beams is first presented, and their propagation characteristics through optical systems having transfer matrix of the from $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ are studied in detail.

Key words higher-order Bessel beams, non-diffracting characteristics, propagation equation, beam converter.