

# 双光栅白光衍射干涉的消色效应

张海联 顾去吾

(上海机械学院仪表系, 上海 200093)

## 提 要

本文提出和研究了白光点源照明下的双光栅衍射干涉效应, 报道了白光照明下剪切干涉的“消色效应”, 给出了完整的菲涅耳线性标量衍射原理的数学推导和几何光学的解释.

关键词 消色效应, 双光栅衍射, 白光干涉.

熟知的光栅衍射干涉的泰伯脱(Talbot)效应<sup>[1]</sup>与 Lau 效应<sup>[2]</sup>都是在低密度光栅(Ronchi 光栅)下观察与应用的<sup>[3~12]</sup>. 本文着重研究了白光点源照明下的双高密度光栅的衍射干涉效应, 在实验上发现了一种新的白光照明下剪切干涉的“消色效应”, 并从理论上给出了解释与分析.

## 1 消色效应

实验装置如图 1 所示, 白光光源经聚光系统聚焦于  $S$  点, 作为白光点源斜入射两块频率相同(为 650 1/mm)且平行放置的全息位相光栅  $G_1$  和  $G_2$ , 其中  $S$  到  $G_1$  的距离为  $d_1$ ,  $G_1$  到  $G_2$  的距离为  $d_2$ . 在距  $G_2$  为  $d_3$  的  $P$  观察屏上观察分别经  $G_1$  与  $G_2$  衍射的两个 +1 级衍射光, 即图示(1, 0)与(0, 1)的剪切干涉场, 其中(1, 0)是经  $G_1$  的 +1 级衍射复经  $G_2$  直接透射光束, (0, 1)是经  $G_1$  透射复经  $G_2$  的 +1 级衍射的光束. 图中  $S_1$  与  $S_2$  分别是某波长  $\lambda$  的(1, 0)与(0, 1)两衍射光的虚光源.

实验上采用点光源对称入射方式. 对称入射即是指入射光按与 +1 级衍射光成镜对称方式入射. 显然, 它是一种全息再现的入射方式. 计算表明, 此时入射光与 +1 级衍射光之间的偏向角最小. 至于点光源的对称入射就是指点源与光栅光阑中心连线的方向满足对称入射或者说点源主光线的方向以对称方式入射.

### 1.1 在点源 $S$ 对称入射方式下

观察  $P$  面 +1 级光谱剪切干涉场有如下特点:

1) 对称性 在  $d_3 = d_1$  时即与点光源相对于双光栅对称位置上观察到对度很好的竖直(与光栅刻线

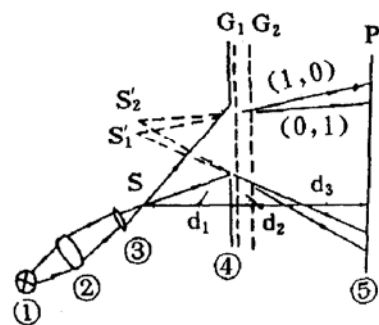


Fig. 1 Schematic diagram of achromatic effect ① white light ②③ condensing lens ④ diaphragm ⑤ observation plane

平行)的消色干涉条纹,如图 2 所示.在各光谱剪切干涉图样的重叠区域,由于各干涉图样彼此周期相同且无错位,各色彩的条纹很好地重合在一起,形成消色条纹,称之为消色效应,当  $d_3$  偏离对称位置后,原消色条纹内部的各色彩成分发生相对移动.

2)定域性 对比度较好的消色条纹定域在上述对称位置区域.前后位移观察屏,条纹由消色变成彩色,同时对比度下降变模糊.

3)周期变化情况 条纹的周期随  $d_2$  的减小(即两光栅的间距的减小)而增大.另外,当沿照明方向拉远点光源,即增大  $d_1$  时,对称位置上的消色条纹的周期也增大.在能看清条纹的前提下,适当增大  $d_3$ ,所观察到的条纹周期也增大.

4)光栅刻线夹角的影响 将某块光栅在面内旋转一小角度,使两光栅刻线有一个小夹角,原竖直的消色条纹发生倾斜且周期变小,对比度有所下降,如图 3 所示.

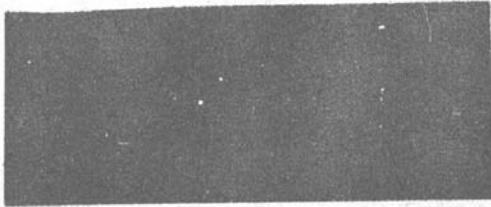


Fig. 2 Photo of the achromatic fringes

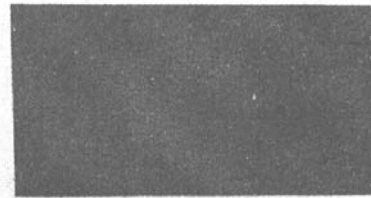


Fig. 3 Photo of oblique achromatic fringes

5)光栅横向移动的影响 调节其中某一光栅的横向平移旋钮,每当两光栅相对平移一个光栅周期,则干涉场中的消色条纹也走过一上条纹周期.

6)点光源大小的影响 当点光源的空间尺寸远小于条纹周期时,则条纹对比度很好,但当增大  $d_2$  致条纹变密,以致光源的空间尺寸接近条纹周期时,对比度严重下降.当空间尺寸超过条纹周期宽度,干涉区一片模糊.另外,若两光栅栅线平行,则可使用与栅线平行的缝光源照明,仍得到对称位置亮度增强的消色条纹.

### 1.2 在点源 $S$ 非对称入射情况中

没有定域良好的整体消色干涉场.在  $d_2$  较小,条纹周期较大时,条纹的定域深度增加,这时亦能观察局部消色的干涉条纹,观察面已不再与点源对称,其它情况类似于上述讨论的特点,不再赘述.

## 2 理论分析

基于菲涅耳线性衍射原理推导了在菲涅耳近似下双光栅系统后的衍射干涉现象.解释了消色效应.为了方便起见,采用黑白振幅型的双光栅模型,由于只考虑两个+1级衍射光的干涉,作者认为,从这种模型所得的结论仍具有普遍性.

如图 4 所示,  $(x_0, y_0)$  平面是点源面,  $(x_1, y_1)$  平面与  $(x_2, y_2)$  平面分别是  $G_1$  与  $G_2$  光栅平面,  $(x_3, y_3)$  平面是观察平面.其中点源  $S(x_0, 0, 0)$  发出球面波,照明  $G_1$  光栅面,该光栅面距离光源面为  $d_1$ ,两光栅面间距为  $d_2$ ,观察面距  $G_2$  光栅为  $d_3$ ,光栅周期为  $d$ .设两光栅刻线有一夹角  $\theta$ ,其中  $G_1$  光栅和  $G_2$  光栅的复振幅透过率函数分别为

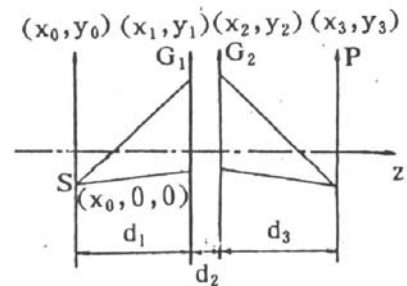


Fig. 4 Diagram of Fresnel linear diffraction principle

$$t_1(x_1, y_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-i2\pi n D x_1} \quad (1)$$

$$t_2(x_2, y_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{-i2\pi m D(x_2 \cos\theta - y_2 \sin\theta)} \quad (2)$$

式中  $D = 1/d$ , 此外定义,  $D_1 = 1/d_1$ ,  $D_2 = 1/d_2$ ,  $D_3 = 1/d_3$ ,  $l = d_1 + d_2 + d_3$  和  $\psi(x, y, P) = \exp[i(\pi P/\lambda)(x^2 + y^2)]$ ,  $P$  为某参数. 在傍轴近似且忽略常数项时, 轴外点源  $S(x_0, 0, 0)$  在  $(x_1, y_1)$  平面的场分布为

$$U_0(x_1, y_1) = \exp\left[ik\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2d_1} - \frac{x_0 x_1}{d_1}\right)\right] = \exp\left[\frac{i\pi D_1}{\lambda}(x_1^2 + y_1^2)\right] \exp\left[-\frac{i2\pi D_1}{\lambda}x_0 x_1\right] \quad (3)$$

式中  $k = 2\pi/\lambda$ , 则透过  $G_1$  后的场分布为

$$U_1(x_1, y_1) = U_0(x_1, y_1)t_1(x_1, y_1) \quad (4)$$

若用  $U_2(x_2, y_2; D_2 - 0)$  表示  $G_2$  光栅面左边无际趋近的场,  $U_2(x_2, y_2; D_2 + 0)$  表示经过光栅  $G_2$  的场, 则

$$U_2(x_2, y_2; D_2 - 0) = \frac{1}{i\lambda d_2} \iint_{\sigma_1} U_1(x_1, y_1) \psi(x_1 - x_2, y_1 - y_2; D_2) dx_1 dy_1 \quad (5)$$

$$U_2(x_2, y_2; D_2 + 0) = U_2(x_2, y_2; D_2 - 0)t_2(x_2, y_2) \quad (6)$$

最后观察屏上

$$U_3(x_3, y_3; D_3) = \frac{1}{i\lambda d_3} \iint_{\sigma_2} U_2(x_2, y_2; D_2 + 0) \psi(x_2 - x_3, y_2 - y_3; D_3) dx_2 dy_2 \quad (7)$$

(5)式与(7)式中  $\sigma_1, \sigma_2$  分别表示  $G_1$  与  $G_2$  的通光口径. 为使讨论简便, 对上述公式作理想化处理, 假定  $\sigma_1, \sigma_2$  无限大, 即积分限从  $-\infty$  到  $+\infty$ . 将(1)式~(6)式代入(7)式, 并经积分运算, 最后得出

$$\left. \begin{aligned} U_3(x_3, y_3; D_3) &= \sum B_m \sum B_n \cdot \frac{d_1}{l} \exp\left\{-ik\left[\frac{x_3^2 + y_3^2}{2l} - \frac{x_3}{l}\left(\frac{(d_1 + d_2)m\lambda \cos\theta + n\lambda d_1}{d} + x_0\right) - \frac{y_3}{l}\left(-\frac{(d_1 + d_2)m\lambda \sin\theta}{d}\right)\right]\right\} \exp\{i[\varphi_1(m, n) + \varphi_2(m, n, x_0)]\} \\ \varphi_1(m, n) &= -\pi\left[\frac{m^2 d_3 (d_1 + d_2) \lambda}{l d^2} + \frac{2m n d_3 d_1 \lambda \cos\theta}{l d^2} + \frac{n^2 d_3 d_1^2 \lambda}{l d^2 (d_2 + d_2)} + \frac{n^2 d_1 d_2 \lambda}{(d_1 + d_2) d}\right] \\ \varphi_2(m, n, x_0) &= -\pi\left[\frac{d_3 x_0^2}{l(d_1 + d_2)\lambda} + \frac{d_2 x_0^2}{(d_1 + d_2)d_1 \lambda} + \frac{2m d_3 x_0 \cos\theta}{l d} + \frac{2n d_3 d_1 x_0}{l d (d_1 + d_2)} + \frac{2n d_2 x_0}{(d_1 + d_2) d}\right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

取  $m + n = 1$  的两个组合, 即  $m = 0, n = 1$  和  $m = 1, n = 0$ . 记上述两 +1 级衍射场分别为  $U_3(0, 1)$  和  $U_3(1, 0)$ , 令其干涉场  $\tilde{U}_3$  为

$$\tilde{U}_3 = U_3(0, 1) + U_3(1, 0) \quad (9)$$

由(8)式, (9)式可得经规一化后干涉场的强度分布

$$I = \tilde{U}_3 \tilde{U}_3^* = \frac{1}{2} \{1 + \cos[\varphi(x_3, y_3, \theta) + \Delta\varphi_1(\lambda) + \Delta\varphi_2(x_0, \theta)]\} \quad (10)$$

$$\varphi(x_3, y_3, \theta) = \frac{2\pi[(\cos\theta - 1)d_1 + d_2 \cos\theta]}{l d} x_3 - \frac{2\pi(d_1 + d_2) \sin\theta}{l d} y_3 \quad (11)$$

$$\Delta\varphi_1(\lambda) = \frac{\pi d_2 (d_3 - d_1) \lambda}{l d^2} \quad (12)$$

$$\Delta\varphi_2(x_0, \theta) = \frac{2\pi[(\cos\theta - 1)d_3 - d_2]}{l d} x_0 \quad (13)$$

1) 当  $\theta = 0$  时, 即两光栅刻线平行时, 由(11)式

$$\varphi(x_3, y_3, 0) = \varphi(x_3) = \frac{2\pi d_2}{ld} x_3 \quad (14)$$

可见,  $\varphi(x_3)$  是由观察面上的移动引入的位相差, 则(13)式改写为

$$\Delta\varphi_2(x_0, 0) = -\frac{2\pi d_2}{ld} x_0 \quad (15)$$

可见  $\Delta\varphi_2(x_0, 0)$  是由系统的初始状态引入的位相差, 从这个意义上说,  $\Delta\varphi_2(x_0, 0)$  相当于初始位相. 由(12)式可知,  $\Delta\varphi_1(\lambda)$  是唯一与波长有关的位相差, 若能使其恒为零, 则整个干涉场就与波长无关, 也就是说各波长的干涉图样能相互叠合, 形成消色条纹. 显然由(12)式可知, 当  $d_3 = d_1$  时,

$$\Delta\varphi_1(\lambda) = 0 \quad (16)$$

干涉场与波长无关. 由(14)式和(15)式可见, 剩余的位相差为

$$\varphi(x_3) + \Delta\varphi_2(x_0, 0) = \frac{2\pi d_2}{ld} (x_3 - x_0) \quad (17)$$

当  $x_3 = x_0$  时

$$\varphi(x_3) + \Delta\varphi_2(x_0, 0) = 0 \quad (18)$$

即此时观察区域处于干涉场的零程差区域附近, 获得对比很好的干涉条纹. 综上所述在

$$x_3 = x_0, \quad d_3 = d_1 \quad (19)$$

时, 能观察到对比良好的消色条纹, 而(19)式已是与  $S$  点光源相对于光栅系统的对称位置.

由(14)式可知, 观察到的消色条纹是与光栅线平行的竖直条纹, 其周期为

$$T = \frac{l}{d_2} \cdot d \quad (20)$$

2) 当  $\theta \neq 0$  时, 仍在  $d_3 = d_1$  的对称平面观察, 由(11)式~(13)式可得条纹族方程

$$\frac{(\cos\theta - 1)d_1 + d_2\cos\theta}{ld} x_3 - \frac{(d_1 + d_2)\sin\theta}{ld} y_3 + \Delta\varphi_2(x_0, \theta) = N \quad (21)$$

$$N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

可见, 条纹发生倾斜, 条纹斜率, 周期  $T'$  分别为

$$\text{tg}\alpha = \frac{(\cos\theta - 1)d_1 + d_2\cos\theta}{(d_1 + d_2)\sin\theta} \quad (22)$$

$$T' = \frac{ld}{\sqrt{(d_1 + d_2)^2 + d_1^2 - 2(d_1 + d_2)d_1\cos\theta}} \quad (23)$$

由(20), (23)式可知

$$T' < T \quad (24)$$

其它一些现象亦可从以上导出的公式中得到解释.

为了对消色效应更直观的理解, 可以再给出一个几何光学推导. 如图 5 所示, 从光源  $S$  向  $G_1, G_2$  投射一光束. 设中心光线以最小偏角入射于  $G_1$ .  $SA, SB$  稍稍偏离中心光线的两根光线, 它们的入射角稍大及稍小于最小偏角, 但有相等的偏折角, 即  $\angle SAP = \angle SBP$ , 故此两光线经折射后必相交于与  $S$  对称的  $P$  点, 由图 5 显然可见

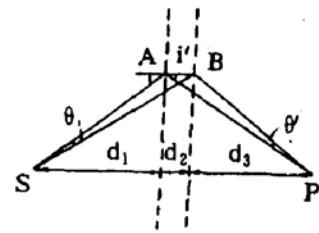


Fig. 5 Diagram of geometrical optics

$SA = BP$ ,  $SB = AP$  即折线  $\overline{SAP} = \overline{SBP}$ . 故此两束光在  $P$  点相遇, 且有相同的程长, 能产生白光干涉, 进一步, 由光栅衍射方程

$$d(\sin i + \sin i') = \lambda \quad (25)$$

其中  $i' > 0$ , 因  $i \doteq i'$  得

$$\sin i' = \frac{\lambda}{2d} \quad (26)$$

考察  $\triangle PAB$  (或  $\triangle SBA$ ) 有

$$\frac{d_2}{\sin \theta'} = \frac{\overline{PB}}{\sin i'} \quad (27)$$

$\theta'$  是相干光线  $AP$  与  $BP$  的夹角, 由于  $\theta'$  一般较小, 近似地有  $\sin \theta' \doteq \theta'$ ,  $2\sin \frac{\theta'}{2} = \theta'$ , 于是条纹的间距为

$$T = \frac{\lambda}{2\sin \frac{\theta'}{2}} = \frac{\lambda}{\theta'} = \frac{\lambda \overline{PB}}{d_2 \sin i'} \quad (28)$$

将(26)式代入(28)式

$$T = \frac{2 \overline{PB}}{d_2} \cdot d \quad (29)$$

Table 1  
 $d = (1/650) \text{ mm}$

$L$ (mm)	$d_2$ (mm)	$T_0$ (mm)	$T$ (mm)
385	6.0	0.1	0.09
385	3.0	0.2	0.19

与(20)式比较, 其中  $l = d_1 + d_2 + d_3 = 2d_1 + d_2$  由  $2 \overline{PB}$  替代. 由(29)式可见, 干涉条纹的间距与波长无关. 同时, 由于(20)式是在傍轴近似下导出的公式, 故(29)式对(20)式作出了修正, 设  $L = 2 \overline{PB}$ , 用(29)式计算的  $T$  值与实验观测值  $T_0$  相符合, 如表 1 所示.

### 3 应用简述

这种消色效应一个直接的应用是测量微小位移. 常用的白光莫尔条纹测位移法要求两光栅应尽量靠近, 从而有相互磨损的问题. 若用泰伯脱效应作离面的莫尔偏折员需用单色相干光照明, 且由于使用低频的伦奇(Ronchi)光栅测量精度降低. 而该白光消色效应即使用白光照明又能使两光栅之间有较大距离, 解决了光栅间的磨损问题. 两光栅相对移动一个周期, 消色条纹亦走动一个条纹, 由于使用高密度光栅, 测量精度高 ( $\mu$  量级). 另外在对称入射的情况下, 光栅间距的微变, 条纹不会走动而只使条纹周期略有变化, 所以这一特点将大大降低移动栅的直线性要求, 更适合横向测微.

另外, 对光源进行适当的空间调制, 并在消色条纹面上加上适当光栅进行莫尔偏折, 则可构成用扩展白光照明的干涉仪.

消色效应的条纹对比度与光源的空间大小有关, 故亦可用于测量光源空间相干性. 有关消色效应的进一步应用还有待于感兴趣同仁的深入发掘.

## 参 考 文 献

- [1] H. F. Talbot, *Phil. Mag and J. Sci* (London) 1836, 9:401
- [2] E. Lau, Interference Phenomenon on Double Gratings. *Anu. Phys.* 1949, 6:417
- [3] Lord Rayleigh, Lond Edinb Dubl. *Phil. Mag.* 1881, 11:196
- [4] K. Patorski, S. Yokozeki, T. Suzuki, Collimation test by double grating shearing interferometer. *Appl. Opt.*, 1976, 15(5):1234~1240
- [5] 廖江红, 顾去吾, 光学系统中光衍射自成像现象: 广义的 Talbot 效应. *光学学报*, 1985, 5(4):331~335
- [6] H. O. Barteit, J. Jahns, Interferometry based on the Lau effect. *Opt. Commun.*, 1979, 30:268
- [7] Szwaykowski. P, Patorski. K, Properties of the Fresnel field of a double-diffraction system. *J. Opt.*, 1985, 18(2):95~103
- [8] K. Patorski, Incoherent superimposition of multiple self-image under plane wave-front illumination. *Appl. Opt.*, 1986, 25(14):2396~2403
- [9] S. Cartwright, A. Lightman, Coherence analysis of the interferometer. *Appl. Opt.*, 1986, 25(18):3141~3145
- [10] J. Swanson, E. N. Leith, Analysis of the Lau Effect and Generalized Grating Imaging. *J. O. S. A. (A)*, 1985, 2(6):789~793
- [11] 刘立人, 反向脉冲传递法-扩展白光干涉现象研究. *光学学报*, 1985, 5(6):481~486
- [12] 刘焕礼, Lau 效应在导向(航)信标中的应用. *光学学报*, 1991, 11(8):749~753

**Achromatic effect of white light double grating diffraction interference**

ZHANG Hailian GU Quwu

*(Optical Instrument Department of Shanghai Institute of Mechanical Engineering, Shanghai 200093)*

(Received 18 June 1992; revised 2 September 1992)

**Abstract**

The double grating diffraction interference illuminated by white light source is investigated. For the first time the achromatic effect of shearing interference under white light is reported. The mathematical derivation and the explanation are given by using Fresnel scale linear diffraction principle and geometrical optics.

**Key words** achromatic effect, double grating diffraction, white light interference.