第 13 卷 第 8 期
1993 年 8 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 13, No. 8
August, 1993

非高斯光束的传输*

林 强 赵道木 王绍民
(杭州大学物理系，杭州 310028)

提 要

提出一种能处理非高斯非轴对称光束传输的张量方法. 引入三个表征任意分布光束的特征张量，运用非对称光学系统的惠更斯衍射积分公式导出了它们的变换规律. 讨论了任意光束的质量因子. 作为一个实例，分析了高阶厄米-高斯光束通过柱面透镜的变换.

关键词 任意光束， 张量方法， 非轴对称系统.

1 引 言

几年前，作者曾提出一种张量 ABCD 定律来处理椭圆高斯光束通过非轴对称光学系统的传输问题[1]，并成功地用于椭圆高斯光束的对称化变换和非轴对称光学谐振腔的分析[2~3]. 但这种方法只适用于基模高斯光束，对高阶模和任意形状的光束不适用.

最近国内外专家对非高斯光束的传输问题从不同的角度进行了研究. 如邓锡铭等利用光束传输的流体模型获得了任意傍轴光束的 ABCD 定律[4]. Siegman 利用光束光强分布的二阶矩量，引入了非高斯光束的有效光斑尺寸、等效曲率半径和品质因素概念[5,6]. Bélanger 利用这些概念定义了任意光束的复曲率 Q^{-1}，得到了与文献[4]的结果等价的变换定律，并用于对渐变位相镜光腔的分析[7,8]. Alda 等通过对高阶模的讨论也得到了类似的结果[9].

这些结果适用于轴对称光束和可分成二个主平面来考虑的简单的非轴对称光束. 对于一般化的非轴对称光束，当 x, y 方向的量不能分离时，以上结果将不适用，如对四极透镜的分析[10]. 本文试图用张量的方法处理这类光束的传输问题，通过引入三个特征张量，任意非对称光束的等效尺寸、等效曲率、光束质量因子等均可清楚地表示出来. 运用二维衍射积分公式，导出了这些特征张量的变换规律. 最后给出应用例子.

2 非高斯光束的特征张量

对一个一维的光场分布可表示为

$$u(x) = \psi(x) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda} \phi(x)\right] \tag{1}$$

收稿日期：1992 年 6 月 2 日；收到修改稿日期：1992 年 9 月 7 日
* 浙江省自然科学基金资助项目.

设光束的能量已被归一化，它的等效光斑尺寸 W 和等效曲率半径 R 定义为[7]

$$W^2=4\int_{-\infty}^{\infty}x^2\psi^2(x)dx,\qquad \frac{1}{R}=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\psi^2(x)\,dx\Big/\int_{-\infty}^{\infty}x^2\psi^2(x)dx \tag{2}$$

一般化的复曲率表示为[7]

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{R}-\frac{i\lambda M^2}{\pi W^2} \tag{3}$$

$$M^4=W_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial\psi_0(x)}{\partial x}\right]^2dx$$

式中 M^2 称为光束质量因子，$\psi_0(x)$、W_0^2 分别为均匀位相面（束腰）处的振幅和光斑尺寸. 对 TEM_{00} 模高斯光束有 $M^2=1$；对其它光束有 $M^2>1$，对轴对称光学系统 M^2 是一个不变量[6]. Q 通过近轴光学系统的变换满足通常的 ABCD 定律[7]：

$$Q_2=\frac{AQ_1+B}{CQ_1+D} \tag{4}$$

以上结果适用于一维的非高斯光束. 对一个任意的二维单色光可表为空间位置和时间的函数.

$$E(x,y,z)=\mathrm{Re}\{\widetilde{E}(x,y,z)\exp\left[i(\omega t-kz)\right]\} \tag{5}$$

该光束沿 z 轴传输并限于近轴范围内，$\widetilde{E}(x,y,z)$ 为复振幅. 设光束的总能量为 1，即满足归一化条件

$$\iint_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{E}(x,y,z)|^2dxdy=1 \tag{6}$$

为了表示光束在任意横截面上的等效光斑尺寸把定义(2)式推广成一个张量：

$$\mathbf{W}^2=4\iint_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{r}^T|\widetilde{E}|^2dxdy=\begin{pmatrix}W_{xx}^2 & W_{xy}^2\\ W_{yx}^2 & W_{yy}^2\end{pmatrix} \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，“$T$”表示转置. 定义(7)可写成：

$$W_{xx}^2=4\iint_{-\infty}^{\infty}x^2|\widetilde{E}|^2dxdy,\qquad W_{yy}^2=4\iint_{-\infty}^{\infty}y^2|\widetilde{E}^2dxdy\qquad W_{xy}^2=W_{yx}^2=4\iint_{-\infty}^{\infty}xy|\widetilde{E}^2dxdy \tag{8}$$

若 $\widetilde{E}(x,y,z)$ 表示基模椭圆高斯光束的复振幅，W_{xx}^2、W_{yy}^2 即为高斯光束在 x、y 方向上的光斑尺寸. 因此 $\mathbf{W}^2$ 可称为光斑尺寸张量. $\mathbf{W}^2$ 中的交叉元素 W_{xy}^2 表示 x、y 方向的耦合. 若 $W_{xy}^2=0$，则光束的主轴在 x、y 轴上，若 $W_{xy}^2\neq 0$，则光斑的主轴方向可由把 x、y 坐标轴逆时针旋转 θ_p 角确定，θ_p 由下式给出

$$\tan(2\theta_p)=\frac{2W_{xy}^2}{W_{xx}^2-W_{yy}^2} \tag{9}$$

二维光束的复振幅通过近轴系统的变换满足下列惠更斯衍射积分[1]：

$$\widetilde{E}_2=\frac{i}{\lambda}|B|^{-1/2}\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}_1e^{-\frac{i\pi}{\lambda}L}dx_1dy_1 \tag{10}$$

$$L=\mathbf{r}_1^TB^{-1}A\mathbf{r}_1-2\mathbf{r}_1^TB^{-1}\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_2^TDB^{-1}\mathbf{r}_2 \tag{11}$$

式中 L 为程函，A、B、C、D 为非轴对称光学系统的 4×4 阶变换矩阵的分块矩阵元，$|B|$ 为 B 的行列式值. 积分式(10)一般得不出解析解，数值计算也是很麻烦的. 但在大多数情况下，并不

需要知道具体的光场分布，而重要的是等效光斑尺寸．为此，可以把(10)式代入(7)式，经运算得

$$W_2^2 = AW_1^2A^T + BU_1\boldsymbol{B}^T + AV_1B^T + BV_1^+A^T \tag{12}$$

$$U_1 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} (\nabla\widetilde{E}_1)(\nabla\widetilde{E}_1)^+ dx_1dy_1 \tag{13}$$

$$V_1 = -\frac{i2\lambda}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} (r_1\widetilde{E}_1)(\nabla\widetilde{E}_1)^+ dx_1dy_1 \tag{14}$$

U、V 为任意光束的另外二个特征张量．与推导(12)式类似，可以得到：

$$U_2 = CW_1^2C^T + DU_1D^T + CV_1D^T + DV_1^+C^T \tag{15}$$

$$V_2 = AW_1^2C^T + BU_1D^T + AV_1D^T + BV_1^+C^T \tag{16}$$

(12)、(15)、(16)三式可以统一到下面矩阵关系中：

$$\begin{pmatrix} W_2^2 & V_2 \\ V_2^+ & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^2 & V_1 \\ V_1^+ & U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T \tag{17}$$

因此，对于任意的光束，只要给出初始光场分布，可以通过(7)、(13)、(14)计算得 W_1^2、U_1 和 V_1，然后利用(17)式便可计算任意位置的等效光斑尺寸，避免了冗繁的积分计算．光斑的面积可用 $\sqrt{|W^2|}$ 计算．

按照上述定义，W^2 是一个实对称矩阵，U 是一个厄米矩阵，V 是一个复数矩阵．在多数情况下，取它们的实部更为方便．为此，设

$$P = \mathrm{Re}\begin{pmatrix} W^2 & V \\ V^+ & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^2 & V_r \\ V_r^T & U_r \end{pmatrix} \tag{18}$$

P 是一个 4×4 阶实对称矩阵，可称之为光束特征矩阵或光束矩阵．事实上，这样做并不影响对等效光斑尺寸 W^2 的计算．在(17)式中两边取实部，得

$$P_2 = FP_1F^T$$
$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{19}$$

(19)式普遍适用于任意光束通过非轴对称光学系统的变换．Serna 等利用 Wigner 分布函数曾得到了部分相干光的二阶矩量传输规律[11]，他们的二阶矩量是在空间域和空间频率域内定义的．本文给出的光束矩阵只需在空间域内定义，计算更会为直接和简单．类似于一维光束[7]，二维任意光束的等效波前曲率可定义为

$$R^{-1} = W^{-2}V_r \tag{20}$$

R^{-1} 实际上是任意光束的平均波面曲率张量．

3 非高斯光束传输的不变量

把一维光束的质量因子加以推广，可以定义二维光束的质量因子张量 M^2：

$$W^2U_r - V_r^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi}M^2\right)^2 \tag{21}$$

$$M^2=\begin{pmatrix}M_{xx}^2 & M_{xy}^2\\ M_{yx}^2 & M_{yy}^2\end{pmatrix}\tag{22}$$

对 x，y 方向不存在耦合的光束，$M_{xy}^2=M_{yx}^2=0$，M_{xx}^2，M_{yy}^2 即为 x，y 方向的质量因子. 对于存在耦合的情况，M_{xx}^2，M_{yy}^2 在传输过程中不再是不变量，但可以证明 $\boldsymbol{M}^4$ 的迹是一个不变量，即

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_2^4)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_1^4)\tag{23}$$

因为变换矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的分块矩阵元之间满足[2]：

$$AD^T-BC^T=\varepsilon,\qquad AB^T=BA^T,\qquad CD^T=DC^T,$$

式中 ε 是 2×2 阶单位矩阵，所以

$$\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{L},\qquad \boldsymbol{L}=\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}\tag{24}$$

$$\boldsymbol{L}=i\begin{pmatrix}0 & -\varepsilon\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{L}^{-1}\tag{25}$$

对任意光束的特征矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和光学系统的变换矩阵 $\boldsymbol{F}$，利用(19)式有

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{L}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{L}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{L}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}^{-1}\tag{26}$$

又

$$\boldsymbol{PLPL}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{U}_r-\boldsymbol{V}_r^2 & -\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{V}_r^T+\boldsymbol{V}_r\boldsymbol{W}^2\\ \boldsymbol{V}_r^T\boldsymbol{U}_r-\boldsymbol{U}_r\boldsymbol{V}_r & \boldsymbol{U}_r\boldsymbol{W}^2-(\boldsymbol{V}_r^T)^2\end{pmatrix}\tag{27}$$

$$\therefore\qquad \mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_2^4)=\frac{\pi^2}{\lambda^2}\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{L})=\frac{\pi^2}{\lambda^2}\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{L}\boldsymbol{F}^{-1})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_1^4)$$

式中用到矩阵求迹的循环性质. 即不论光束是否存在耦合或光学系统是否正交，(23)式总是成立的. 若光束开始时不存在耦合，即 $\boldsymbol{W}_1^2$、$\boldsymbol{U}_{r1}$、$\boldsymbol{V}_{r1}$ 都是对角化的，这时 $\boldsymbol{M}_1^4$ 也是对角化的. 从(26)式可得

$$\boldsymbol{M}_2^4=A\boldsymbol{M}_1^4D^T-B\boldsymbol{M}_1^4C^T\tag{28}$$

可见 $\boldsymbol{M}^4$ 本身不是一个不变量，此外很难找到一个复曲率张量来表示任意光束. 不变量 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^4)$ 存在一个最小值. 对基模高斯光束，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^4)=2$，对一般光束，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^4)>2$.

4　应用例子

本节将应用上述方法分析高阶模的传输. 一个非对称的 TEM_{mn} 模厄米-高斯光束可表为

$$\widetilde{E}(x,y,z)=E_0\frac{1}{[W_x(z)W_y(z)]^{1/2}}H_m\left(x\frac{\sqrt{2}}{W_x(z)}\right)H_n\left(y\frac{\sqrt{2}}{W_y(z)}\right)\exp\left[-i\frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{q_x}+\frac{y^2}{q_y}\right)\right]\exp[i\phi(z)]\tag{29}$$

为了式子的简化，考虑 TEM_{10} 模的传输，在束腰处，其复振幅可表示为

$$\widetilde{E}_{10}=A_0\frac{x}{\sqrt{W_{x0}W_{y0}}}\exp\left[-\left(\frac{x^2}{W_{x0}^2}+\frac{y^2}{W_{y0}^2}\right)\right]\tag{30}$$

式中常数 A_0 可由归一化条件(6)确定. 根据定义，三个特征张量可算得为

$$\boldsymbol{W}_1^2=\begin{pmatrix}3W_{x0}^2 & 0\\ 0 & W_{y0}^2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{U}_1=\frac{\lambda^2}{\pi^2}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{W_{x0}^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{W_{y0}^2}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{V}_1=i\frac{\lambda}{\pi}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\tag{31}$$

光束质量因子张量为

$$\boldsymbol{M}_1^4 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

考虑该光束通过一个任意取向的柱面透镜的变换. 如图 1,设入射光束的束腰位于前焦面上,柱透镜的光焦度方向与 x 轴的夹角为 θ,这样,从前焦面到后焦面的总变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & f(1+\sin^2\theta) & -f\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & -f\sin\theta\cos\theta & f(1+\cos^2\theta) \\ -\dfrac{\cos^2\theta}{f} & -\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{f} & \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{f} & -\dfrac{\sin^2\theta}{f} & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix} \tag{33}$$

把(32)和(33)式代入(28)式,得

$$\boldsymbol{M}_2^4 = \begin{pmatrix} 9 & 4\sin 2\theta \\ -4\sin 2\theta & 1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

从(32)、(34)式可以看出,$\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_1^4) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_2^4) = 10$. 把(31)和(33)式代入(19)式可得到输出面上的等效光斑尺寸张量为:

$$\boldsymbol{W}_2^2 = \begin{pmatrix} 3W_{x0}^2\sin^4\theta + W_{y0}^2\sin^2\theta\cos^2\theta & -3W_{x0}^2\sin^3\theta\cos\theta - W_{y0}^2\sin\theta\cos^3\theta \\ -3W_{x0}^2\sin^3\theta\cos\theta - W_{y0}^2\sin\theta\cos^3\theta & 3W_{x0}^2\sin^2\theta\cos^2\theta + W_{y0}^2\cos_q^4 \end{pmatrix} + \frac{\lambda^2 f^2}{\pi^2}$$
$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{3}{W_{x0}^2}(1+\sin^2\theta)^2 + \dfrac{1}{W_{y0}^2}\sin^2\theta\cos^2\theta & -\dfrac{3}{W_{x0}^2}(1+\sin^2\theta)\sin\theta\cos\theta - \dfrac{1}{W_{y0}^2}(1+\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta \\ -\dfrac{3}{W_{x0}^2}(1+\sin^2\theta)\sin\theta\cos\theta - \dfrac{1}{W_{y0}^2}(1+\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta & \dfrac{3}{W_{x0}^2}\sin^2 2\theta + \dfrac{1}{W_{y0}^2}(1+\cos^2\theta)^2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{W}_2^2$ 反映了输出面上的光斑分布情况.

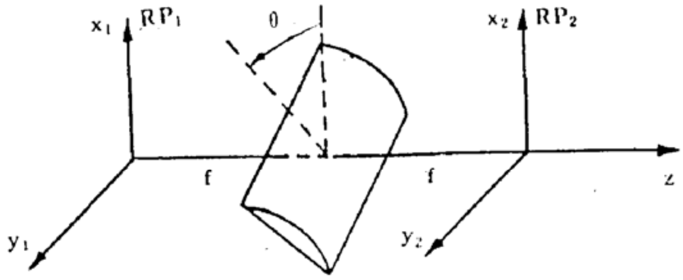

Fig. 1 Transformation of TEM_{10} mode through an arbitrary oriented cylindrical lens

5 结 论

美国斯坦福大学 Siegman 教授等给出的二阶矩量描述非高斯光束的结果,适用于轴对称光束和无耦合光束,如超高斯光束、贝塞尔光束等. 本文给出的张量方法则更具普遍性,能处理一般非高斯光束通过任意非轴对称光学系统的变换. 运用这种方法时,先利用(7)、(13)、(14)式算得初始光束的 $\boldsymbol{W}_1^2$、$\boldsymbol{U}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_1$,再通过(19)式便可以计算任意输出面的平均光斑尺寸和等效曲率半径,以及对光束质量进行评价. 如直接利用惠更斯衍射积分公式(10)计算,对不同的输出面要进行一次一次的数值积分,本文的方法显然要简单得多.

参 考 文 献

[1] 林　强，陆璇辉，王绍民，　非对称光学系统的 ABCD 定律. 光学学报，1988，8(7)：658～662
[2] 林　强，王绍民，吕百达，　非轴对称光腔的矩阵光学分析. 中国激光，1990，17(3)：150～155
[3] Lin Qiang, Wang Shaomin, J. Alda *et al.*, Transformation of nonsymmetric Gaussian beam into symmetric one by means of tensor ABCD law. *Optik*, 1990, **85**(2)：67～72
[4] 邓锡铭，丁丽明，叶陈春，　ABCD 定律的推广. 中国激光，，1990，17(5)：259～264
[5] A. E. Siegman, Laser beam propagation and beam quality formulas. *Proc. SPIE*, 1990, **1224**：2
[6] A. E. Siegman, Defining the effective radius of curvature for a nonideal optical beam. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1991, **27**：1146～1148
[7] P. A. Bélanger, Beam propagation and the ABCD ray matrices. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(4)：196～198
[8] P. A. Bélanger, C. Paré, Optical resonator using graded-phase mirrors. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(14)：1057～1059
[9] J. Alda, E. Bernabeu, M. A. Porras, Laser system with apertures. *IWBT* '91, Shenzhen, China, 1991：81～120
[10] H. Weber, Wave optical analysis of the phase space analyser. *J. Mod. Opt.*, 1992, **39**(3)：543～559
[11] J. Serna, R. Martinez-Herrero, P. M. Mejias, Parametric characterization of general partially coherent beams propagating through ABCD optical systems. *J. O. S. A. (A)*, 1991, **8**(7)：1094～1098

Propagation of non-Gaussian beams

LIN Qiang　　ZHAO Daomu　　WANG Shaomin
(*Department of Physics, Hangzhou University, Hangzhou* 310028)
(Received 2 June 1992; revised 7 September 1992)

Abstract

A tensor method is developed in this paper to deal with the propagation of non-Gaussian and non-symmetric optical beams. Three tensors are defined to describe any profile beams. Their transformation rules through non-symmetric systems are derived by using two-dimension Huygens integral. The beam quality factor of arbitrary beam is discussed. As an example, the transformation of high-order Hermite-Gaussian beam through a cylindrical lens system is given.

Key words　arbitrary beam,　tensor method,　non-symmetric system.