

# 散斑错位干涉术条纹的形成与特性分析

张朝晖 陆福一 徐绪笃

(西北工业大学应用物理系, 西安 710072)

## 提 要

通过相关计算及滤波分析,建立了散斑错位干涉术条纹强度的统计分布,从而得到了这类条纹更为一般的特征属性.

**关键词** 散斑错位干涉术, 相关计算, 滤波分析条纹特性.

## 1 引 言

散斑错位干涉术是由 Y. Y. Hung 倡导而发展起来的一种重要的散斑计量方法. Y. Y. Hung 不仅为这一方法提出了整套的实验技术,而且也系统地解释了条纹的形成及其意义<sup>[1]</sup>. 然而, 这些理论基本上都是定性的, 特别值得注意的是, 按照这些理论无法解释滤波条纹随滤波孔位置改变而漂移的实验事实. 这表明, Hung 理论不够准确, 他所描述的条纹特性并不具有一般性. 本文运用统计光学的方法, 研究散斑错位干涉术条纹的形成和特性, 得到了更为一般的结论.

## 2 相关计算

图 1 是散斑错位干涉术记录系统的典型光路. 由于错位镜 S 的存在, 经记录孔径上、下两个部分  $P_1(S)$  和  $P_2(S)$  所成的像彼此错开.

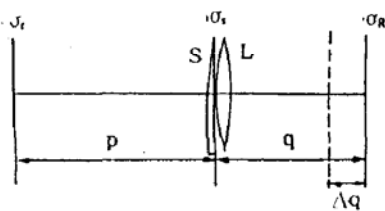


Fig. 1 The setup for shearing interference photography

$\sigma_o$ —object plane	$\sigma_a$ —aperture plane
$\sigma_R$ —defocus image plane	p—object distance
q—defocus image distance	$\Delta q$ —defocus distance
S—shearing prism	L—lens

在物体变形前后做两次曝光, 则散斑图所记录的光强为

$$I(R) = \sum_m \sum_k \sum_l g_{mk}(k) g_{ml}^*(k) \quad m, k, l = 1, 2$$

其中,  $g_{mk}(k)$  是第  $m$  次曝光时, 经孔径  $P_k(s)$  所成的象光场. 因此, 光强的自相关函数可以表示为

$$\langle I(\mathbf{R})I(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle = \sum_m \sum_k \sum_l \sum_n \sum_r \sum_s \langle g_{mk}(\mathbf{R})g_{ml}^*(\mathbf{R})g_{nr}(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R})g_{ns}^*(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle \quad (1)$$

$$m, k, l, n, r, s = 1, 2$$

设物体表面的光场满足 Goodman 所做的统计假设<sup>[2]</sup>, 可以推知, 象面光场  $g_{ij}(\mathbf{R})$  ( $i, j = 1, 2$ ) 均为复高斯分布, 因此<sup>[3]</sup>

$$\langle g_{mk}(\mathbf{R})g_{ml}^*(\mathbf{R})g_{nr}(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R})g_{ns}^*(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle = \langle g_{mk}(\mathbf{R})g_{ml}^*(\mathbf{R}) \rangle \langle g_{nr}(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R})g_{ns}^*(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle + \langle g_{mk}(\mathbf{R})g_{ns}^*(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle \langle g_{ml}^*(\mathbf{R})g_{nr}(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle \quad (2)$$

由于  $P_1(\mathbf{s})P_2(\mathbf{s}) = 0$ , 可以证明

$$\langle g_{mk}(\mathbf{R})g_{ns}^*(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle = \delta_{ks} \langle g_{mk}(\mathbf{R})g_{nk}^*(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle \quad (3)$$

即出自两个重叠孔径的光场互不相关. 则文献[4, 5]知道

$$\langle g_{mk}(\mathbf{R})g_{nk}^*(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle = \exp [j\varphi_{nm}^k(\mathbf{R})] \exp \left( -jk \frac{\Delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}{q} \right) \int_{\sigma_s} P_k(\mathbf{s})P_k^* [ \mathbf{s} - \mathbf{d}_{nm}^k(\mathbf{R}, \mathbf{s}) ] \exp [ j\phi_{nm}^k(\mathbf{R}, \mathbf{s}) ] \exp \left[ -jk \frac{\mathbf{s} \cdot (\Delta\mathbf{R} - \mathbf{A}_{nm}^k(\mathbf{R}))}{q} \right] ds \quad (4)$$

其中,  $\varphi_{nm}^k(\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{A}_{nm}^k(\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{d}_{nm}^k(\mathbf{R}, \mathbf{s})$ ,  $\phi_{nm}^k(\mathbf{R}, \mathbf{s})$  均如文献[4, 5]所定义. 需要特别说明的是, 由于错位镜的存在, 物面上任两个以错位量为间距的点, 经透镜上、下两个部, 在像面上同一点  $\mathbf{R}$  处相遇,  $\mathbf{A}_{nm}^k(\mathbf{R})$  是经过孔径  $P_k(\mathbf{s})$  在  $\mathbf{R}$  处所记录的像面散斑位移,  $\varphi_{nm}^k(\mathbf{R})$  是经过孔径  $P_k(\mathbf{s})$  所成像在  $\mathbf{R}$  处的位相变化, 并且  $\varphi_{nm}^k(\mathbf{R})$  可以表示成

$$\varphi_{nm}^k(\mathbf{R}) = k [ l_s^k(\mathbf{R}) + l_o^k(\mathbf{R}) ] \cdot \mathbf{a}_{nm}^k(\mathbf{R}) \quad (5)$$

其中,  $l_s^k(\mathbf{R})$  和  $l_o^k(\mathbf{R})$  分别是由  $\mathbf{R}$  所对应的物点指向照明光源和透镜  $L$  中心的单位矢量,  $\mathbf{a}_{nm}^k(\mathbf{R})$  是  $\mathbf{R}$  所对应物点的变形位移.

仿照文献[5, 6]定义复解相关因子  $\gamma_{nm}^k(\mathbf{R})$ , 即

$$\gamma_{nm}^k(\mathbf{R}) = \frac{\int_{\sigma_s} P_k(\mathbf{s})P_k^* (\mathbf{s} - \mathbf{d}_{nm}^k(\mathbf{R}, \mathbf{s})) \exp [ j\phi_{nm}^k(\mathbf{R}, \mathbf{s}) ] ds}{\int_{\sigma_s} |P_k(\mathbf{s})|^2 ds} \quad (6)$$

根据文献[5, 6]作者的分析, 同理可将(4)式表示为

$$\langle g_{mk}(\mathbf{R})g_{nk}^*(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle = \exp [ j\varphi_{nm}^k(\mathbf{R}) ] \exp \left( -jk \frac{\Delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}{q} \right) \gamma_{nm}^k(\mathbf{R}) \int_{\sigma_s} |P_k(\mathbf{s})|^2 \exp \left\{ -jk \frac{\mathbf{s} \cdot [\Delta\mathbf{R} - \mathbf{A}_{nm}^k(\mathbf{R})]}{q} \right\} ds \quad (7)$$

将(2)、(3)和(7)式代入(1)式得

$$\langle I(\mathbf{R}), I(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle = C_0 + \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l \{ \gamma_{nm}^k(\mathbf{R}) \gamma_{nl}^k(\mathbf{R}) \exp \{ j [ \varphi_{nm}^k(\mathbf{R}) - \varphi_{nl}^k(\mathbf{R}) ] \} \} D[\Delta\mathbf{R} - \mathbf{A}_{nm}^k(\mathbf{R})] D^* [\Delta\mathbf{R} - \mathbf{A}_{nl}^k(\mathbf{R})] \} \quad (8)$$

其中  $C_0$  为常数, 且

$$D(\Delta\mathbf{R} - \mathbf{A}_{nm}^k(\mathbf{R})) = \int_{\sigma_s} |P_k(\mathbf{s})|^2 \exp \left\{ -jk \frac{\mathbf{s} \cdot [\Delta\mathbf{R} - \mathbf{A}_{nm}^k(\mathbf{R})]}{q} \right\} ds \quad (9)$$

由(9)式知道,  $D(\Delta\mathbf{R} - \mathbf{A}_{nm}^k(\mathbf{R}))$  仅在  $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{A}_{nm}^k(\mathbf{R})$  附近, 散斑大小的范围内显著不为零. 设散斑的平均直径为  $\epsilon$ , 则只有当  $|\mathbf{A}_{nm}^k(\mathbf{R}) - \mathbf{A}_{nl}^k(\mathbf{R})| < \epsilon$  时,  $D(\Delta\mathbf{R} - \mathbf{A}_{nm}^k(\mathbf{R}))$  的非零值区域与

$D^*(\Delta R - A_{nm}^l(R))$  的非零值区域才有所重叠, 即  $D(\Delta R - A_{nm}^k(R)) \cdot D^*(\Delta R - A_{nm}^l(R)) \neq 0$ . 否则两者没有重叠, 乘积为零. 为了将这个意义明确地表示出来, 定义

$$\delta(A_{nm}^k, A_{nm}^l) = \begin{cases} 1 & |A_{nm}^k(R) - A_{nm}^l(R)| < \varepsilon \\ 0 & |A_{nm}^k(R) - A_{nm}^l(R)| > \varepsilon \end{cases} \quad (10)$$

这样, 可将(8)式表示为

$$\langle I(\mathbf{R})I(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle = C_0 + \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l \{ \delta(A_{nm}^k, A_{nm}^l) \gamma_{nm}^k(\mathbf{R}) \gamma_{nm}^{l*}(\mathbf{R}) \exp [ j [ \varphi_{nm}^k(\mathbf{R}) - \varphi_{nm}^l(\mathbf{R}) ] ] \cdot D(\Delta\mathbf{R} - A_{nm}^k(\mathbf{R})) D^*(\Delta\mathbf{R} - A_{nm}^l(\mathbf{R})) \} \quad (11)$$

此式表明, 错位干涉散斑图所记录光强的自相关函数, 不仅受到散斑照相的解相关因子  $\gamma_{nm}^k \cdot \gamma_{nm}^{l*}$  的影响, 而且受到位移梯度的影响, 且对于一定的错位量, 位移梯度愈大, 相关性愈低.

### 3 滤波分析

通常情况下, 散斑错位干涉术的条纹是通过空频滤波而获得的. 典型的空频滤波系统是  $4f$  系统, 本文以此系统为例进行讨论, 所得结果同样适用其它系统.

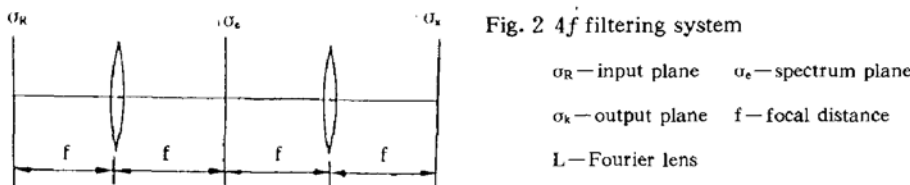


图 2 是  $4f$  滤波系统示意图. 设谱面上的滤波孔函数为  $H(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0)$ ,  $\mathbf{e}_0$  是孔的中心坐标矢量, 且  $\mathbf{e}_0 \neq 0$ , 则系统的点扩散函数可表示为

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{R}) = \int_{\sigma_e} H(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0) \exp \left[ jk \left( \frac{\mathbf{R} + \mathbf{x}}{f} \right) \cdot \mathbf{e} \right] d\mathbf{e} \quad (12)$$

将散斑图置于滤波系统的输入面  $\sigma_R$  上, 则在线性记录的条纹下, 且略去无关紧要的常数, 输出面  $\sigma_x$  上的统计平均光强为

$$I_G(\mathbf{x}) = \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l \int_{\sigma_R} \int_{\sigma_{\Delta R}} \langle I(\mathbf{R})I(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) \rangle h(\mathbf{x}, \mathbf{R}) h^*(\mathbf{x}, \mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}) d\mathbf{R} d\Delta\mathbf{R} \quad (13)$$

为了能够分辨散斑图所记录的物体变形, 滤波孔应足够大, 以致在它的爱利斑大小范围内, 各点的变形基本相同. 这样, 变形因子中的  $\mathbf{R}$  可换成它的几何象点  $-\mathbf{x}$ . 做了这样的近似处理以后, 可利用(9)、(11)和(12)式计算(13)式.

当散斑图足够大时, 它的孔径傅里叶变换是一尖脉冲函数, 与其它因子相比可看成  $\delta$  函数, 即

$$\int_{\sigma_R} \exp \left[ jk \frac{\mathbf{R} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}')}{f} \right] d\mathbf{R} = \delta(\mathbf{e} - \mathbf{e}') \quad (14)$$

所以得到

$$I_G(\mathbf{x}) = \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l \{ \delta(A_{nm}^k, A_{nm}^l) \gamma_{nm}^k(-\mathbf{x}) \gamma_{nm}^{l*}(-\mathbf{x}) \exp [ j [ \varphi_{nm}^k(-\mathbf{x}) - \varphi_{nm}^l(-\mathbf{x}) ] ] \}$$

$$\cdot \int_{\sigma_{\Delta R}} \int_{\sigma_e} D(\Delta R - A_{nm}^k(-x)) D^*(\Delta R - A_{nm}^l(-x)) |H(e - e_0)|^2 \exp\left(jk \frac{\Delta R \cdot e}{f}\right) d\Delta R de$$

根据(9)式,再利用(14)式近似,并且由于滤波孔比照相记录孔径小得多,进一步得到

$$I_G(x) = C_0 \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l \{ \delta(A_{nm}^k, A_{nm}^l) \gamma_{nm}^k(-x) \gamma_{nm}^l(-x) \alpha_{nm}^{kl}(-x) \beta_{nm}^l(-x) W_{kl}(e_0) \exp[jk \Lambda_{nm}^{kl}(-x)] \} \quad (15)$$

其中  $\gamma_{nm}^k(-x)$ ,  $\delta(A_{nm}^k, A_{nm}^l)$  如(6)、(10)式所定义,且

$$C_0 = \int_{\sigma_e} |H(e)|^2 de, \quad (16a)$$

$$\alpha_{nm}^{kl}(-x) = \frac{\int_{\sigma_s} |P_k(s)|^2 \cdot |P_l(s - \frac{q}{f}e_0)|^2 \exp\left\{jk \left[\frac{A_{nm}^k(-x) - A_{nm}^l(-x)}{q}\right] \cdot s\right\} ds}{\int_{\sigma_s} |P(s)|^2 \cdot |P(s - \frac{q}{f}e_0)|^2 ds}, \quad (16b)$$

$$\beta_{nm}^l(-x) = \frac{\int_{\sigma_e} |H(e)|^2 \exp[jk e \cdot A_{nm}^l(-x)] de}{\int_{\sigma_e} |H(e)|^2 de}, \quad (16c)$$

$$W_{kl}(e_0) = \int_{\sigma_s} |P_k(s)|^2 \cdot |P_l(s - \frac{q}{f}e_0)|^2 ds, \quad (16d)$$

$$\Lambda_{nm}^{kl}(-x) = [\varphi_{nm}^k(-x) - \varphi_{nm}^l(-x)] + \left(\frac{k}{f}\right) e_0 \cdot A_{nm}^l(-x), \quad (16e)$$

根据(5)式可知

$$\begin{aligned} \varphi_{nm}^k(-x) - \varphi_{nm}^l(-x) &= k[l_s^k(-x) + l_0^k(-x)] \cdot a_{nm}^k(-x) \\ &\quad - k[l_s^l(-x) + l_0^l(-x)] \cdot a_{nm}^l(-x) \end{aligned}$$

还原到物面,得到

$$\varphi_{nm}(r_k) - \varphi_{nm}(r_l) = k[l_s(r_k) + l_0(r_k)] \cdot a_{nm}(r_k) - k[l_s(r_l) + l_0(r_l)] \cdot a_{nm}(r_l)$$

这正是 Y. Y. Hung 所描述的. 物体变形所引起的相对位相变化,它是位移微分的函数<sup>[1]</sup>.

将(15)式整理后,即可得到

$$\begin{aligned} I_G(x) &= 2C_0 \sum_k W_{kl}(e) \cdot [1 + |\gamma_{21}^k(-x)|^2 \cdot |\beta_{21}^k(-x)| \\ &\quad \cdot \cos\left\{k \frac{e_0 \cdot A_{21}^k(-x)}{f} + \arg\{\beta_{21}^k(-x)\}\right\}] + 2C_0 \sum_{\substack{k \\ k \neq l}} \sum_l W_{kl}(e) \\ &\quad \cdot [1 + |\mu_{kl}(-x)| \cos(\Delta_{21}^{kl}(-x) + \arg\{\mu_{kl}(-x)\})] \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\arg\{\dots\}$  表示复函数幅角,且

$$\mu_{kl}(-x) = \delta(A_{21}^k, A_{21}^l) \gamma_{21}^k(-x) \gamma_{21}^l(-x) \alpha_{21}^{kl}(-x) \beta_{21}^l(-x) \quad (18)$$

在(17)式中,前一个求和中的各项是散斑照相术的条纹信息,后一个求和中的各项含有散斑错位干涉术的变形信息.适当地选择滤波孔的位置  $e_0$ ,可将后一个求和中的任一项分离出来.

作者曾研究了散斑错位干涉图的频谱特性,结果表明,  $W_{kl}(e)$  是其频谱的基本成分,这些基本成分在谱面上有确定的分布区域,这些区域的分布取决于记录孔径的分布<sup>[7]</sup>.对于图 1 所示系统的记录孔径分布(如图 3(a)所示),散斑图频谱成分的分布区域如图 3(b)所示.  $W_{11}(e)$

和  $W_{22}(\mathbf{e})$  分布在中间类似于椭圆的区域内;  $W_{12}(\mathbf{e})$  和  $W_{21}(\mathbf{e})$  分别处于上半圆和下半圆的区域内. 为了得到散斑错位干涉术的变形信息, 应在  $W_{12}(\mathbf{e})$  和  $W_{21}(\mathbf{e})$  单独存在的区域内开孔滤波, 即图 3b 中的两个阴影区. 这样, 由(17)式得到

$$I_G(\mathbf{x}) = 2C_0 [1 + |\mu_{12}(-\mathbf{x})| \cos(\Delta_{21}^{\mu}(-\mathbf{x}) + \arg\{\mu_{12}(-\mathbf{x})\})] W_{12}(\mathbf{e}_{01}), \quad (19a)$$

或者

$$I_G(\mathbf{x}) = 2C_0 [1 + |\mu_{21}(-\mathbf{x})| \cos(\Delta_{12}^{\mu}(-\mathbf{x}) + \arg\{\mu_{21}(-\mathbf{x})\})] W_{21}(\mathbf{e}_{02}), \quad (19b)$$

其中  $\mathbf{e}_{01}$  处于上阴影区,  $\mathbf{e}_{02}$  处于下阴影区. 由(19)式可以得出散斑错位干涉术条纹的各种特征属性.

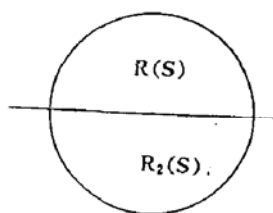


Fig. 3(a) Distribution of the apertures

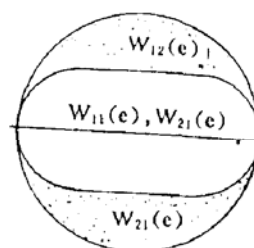


Fig. 3(b) Distribution of the zones of spectrum

## 4 条纹特性

由(19)式可知, 散斑错位干涉术的条纹是一种余弦条纹, 这种条纹的意义由余弦函数中的位相  $\Delta_{21}^{\mu}(-\mathbf{x}) + \arg\{\mu_{21}(-\mathbf{x})\}$  决定, 它的对比度取决于因子  $|\mu_{21}(-\mathbf{x})|$ .

### 4.1 条纹的意义

由(16e), (19a), (19b)式知道, 等值条纹的方程为

$$[\varphi_{21}^k(-\mathbf{x}) - \varphi_{21}^l(-\mathbf{x})] + \left(\frac{k}{f}\right) \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{A}_{21}^l(-\mathbf{x}) + \arg\{\mu_{21}(-\mathbf{x})\} = 2n\pi$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其中, 第一项是 Y. Y. Hung 所描述的相对位相变化, 第二项是散斑照相术的条纹位相, 第三项是由物体变形所决定的一个附加的修正位相. 这表明, 散斑错位干涉术的条纹中, 还含有散斑照相术的条纹位相, 因此当滤波孔的位置改变时, 条纹会随之漂移. 当象面散斑位移为零时, 散斑照相术的条纹位相消失, 并且  $\arg\{\mu_{21}(-\mathbf{x})\} \approx 0$ , 则等值条纹方程变为

$$[\varphi_{21}^k(-\mathbf{x}) - \varphi_{21}^l(-\mathbf{x})] = 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

这才是 Y. Y. Hung 所描述的散斑错位干涉术的条纹. 说明, Y. Y. Hung 的理论仅是象面散斑位移为零的特例.

### 4.2 条纹对比度

由(18)式知道,  $|\mu_{21}(-\mathbf{x})| = \delta(A_{21}^k, A_{21}^l) \cdot |\gamma_{21}^k(-\mathbf{x}) \gamma_{21}^l(-\mathbf{x})| \cdot |\alpha_{21}^k(-\mathbf{x})| \cdot |\beta_{21}^l(-\mathbf{x})|$ ,

其中,  $|\gamma_{21}^k(-\mathbf{x}) \gamma_{21}^l(-\mathbf{x})|$  取决于散斑照相术的解相关特性, 如文献[5,6]所描述, 较大的离焦量, 透镜象差以及物体变形使它显著减小.  $|\beta_{21}^l(-\mathbf{x})|$  如(16c)式所描述, 取决于滤波孔径和象面散斑位移的大小, 并且滤波孔径和散斑位移愈大, 它的值愈小.  $\delta(A_{21}^k, A_{21}^l) |\alpha_{21}^k(-\mathbf{x})|$  如

(10)、(16b)式所描述,取决于象面散斑的位移差,且当位移梯度和错位量愈大时,它的值愈小.特别是,当在象面上一点相遇的两个物点的象面散斑位移之差的模值大于散斑直径时, $\delta(A_{21}^i, A_{21}^j) |a_{21}^i(-\mathbf{x})|$  的值为零.  $|\mu_{kl}(-\mathbf{x})|$  的值愈小,余弦条纹的对比度将愈低,若  $|\mu_{kl}(-\mathbf{x})|$  的值为零时,条纹将完全消失.

这些结论的正确性可由条纹的漂移和模糊现象得到定性的验证,我们将另文讨论进一步的研究和应用.

### 参 考 文 献

- [1] Y. Y. Hung, C. Y. Liang, Image-shearing camera for direct measurement of surface strains. *Appl. Opt.*, 1979, 18(7):1046~1050
- [2] J. C. Dainty ed.; Laser speckle and related phenomena. Berlin; Springer, 1975; Chapter II
- [3] E. Wolf ed.; *Progress in Optics*, X IV. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1976;10
- [4] I. Yamaguchi, Speckle displacement and decorrelation in the diffraction and image fields for small object deformation. *Opt. Acta*, 1984, 28(10):1359~1376
- [5] I. Yamaguchi, Fringe formation in speckle photography. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1984, 1(1):81~86
- [6] D. W. Li, J. B. Chen, F. D. Chang, Statistical analysis of one-beam subjective laser-speckle interferometry. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1985, 2(5):657~666
- [7] 张朝晖, 姬婉华, 徐绪笃, 激光散斑复合错位干涉图频谱的统计分析, 光学学报, 1987, 7(11):1007~1012

## Analysis on the formation and characteristics of fringes in speckle-shearing interferometry

ZHANG Zhaohui    LU Fuyi    XU Xuda

(Department of Applied Physics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072)

(Received 15 June 1992; revised 7 September 1992)

### Abstract

Through correlation calculation and filtering analysis, statistical distribution of fringe intensity in speckle-shearing interferometry has been established, so that more general characteristics of this kind of fringe have been obtained.

**Key words** speckle-shearing interferometry, correlation calculation filtering analysis, fringe characteristic.