

前 言

留英学者专刊在中国光学学会以及光学学报编辑部的大力支持下出版了。这里介绍了留英学者的部分工作,希望能与国内进行交流。

留英学者光电子协会是在1992年3月于伦敦成立的。目前有会员七十余人,分布在英国各主要大学及研究所的光学实验室中。协会的宗旨是加强留英学者、学生之间的联系与交流,联合起来为祖国的光学事业的发展作贡献。因此,本协会希望与中国光学学会各专业委员会,各大学,研究所的光学专业建立联系,促进中英学术交流,并为大家提供英国光电子情况的咨询服务。

望祖国的光电子事业繁荣昌盛!

留英学者光电子协会

1992年12月

用于衍射光学元件优化设计的遗传算法 及其与模拟退火算法的比较

羊国光*

(中国科学院研究生院,北京 100039)

提 要

本文成功地将遗传算法运用于高维衍射位相光学元件的优化设计,并与模拟退火算法进行了比较。结果表明,该算法不仅对于二元,而且对于多元位相光学元件的优化设计均是十分有效的。而且,它特别适用于利用光电混合处理系统进行优化计算。

关键词: 衍射光学元件, 遗传算法, 模拟退火算法。

1 引 言

位相型全息光学元件是一种对光场进行位相调制,在输出面上由衍射而得到所需的光场分布的元件,称为衍射光学元件(DOE)。由于制作上必须对其位相进行量法,故又称为二元光学^[1]。衍射光学元件的设计是一个高维变量函数优化问题。已存在一些优化算法,如迭代投影算法^[2],直接二元搜索^[3]以及模拟退火(SA)算法^[4]等。许多算法往往会使解落入局部极小而不

收稿日期:1992年9月28日;收到修改稿日期:1992年12月30日

* 现在地址:英国牛津大学工程科学系

能自拔. 找到整体极小解的算法要以模拟退火法最为有效. 它已成功地应用于光点阵列的产生^[5], 二元纯位相滤波器^[6]以及光学互连的设计^[7].

近年来提出了遗传算法^[8]. 它是一种基于自然选择与遗传原理的一种搜索算法. 它将适合生存原理与基因交换结构结合起来, 形成一个具有独特优化机制的新算法. 已成为高维变量函数优化的有力工具. 最近, Mahlab 等^[9]将它运用于相关滤波器的设计问题. 后他们又基于光电混合相关器给出了遗传算法与模拟退火算法的比较^[10]. 但他们对遗传算法的运用只限于低维与光电混合相关分类器的特殊情况, 而且只运用于二元振幅滤波器的设计.

本文修改了文献[9]中的算法, 成功地运用于高维衍射光学元件的设计. 文中分析了如何控制优化过程, 给出了算法实施的基本规则. 对遗传算法与模拟退火算法也作了比较, 结果与文献[10]中给出的有所不同.

2 衍射光学元件的设计问题

通常应用衍射光学元件的光学系统如图 1 所示. 图中 $f(x, y)$ 为位相光学元件, 可表示为

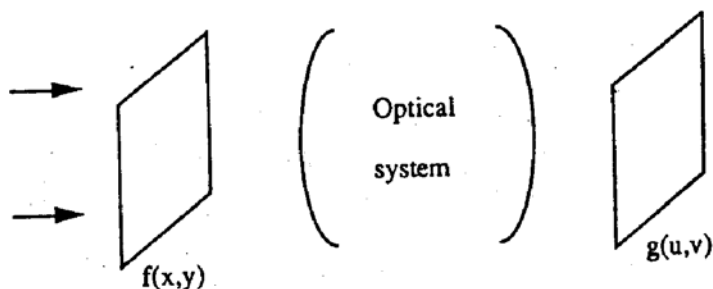


Fig. 1 The system of using DOE, where $f(x, y)$ is the phase element and $g(u, v)$ is the output

$f(x, y) = \exp[j\phi(x, y)]$. 位相函数可量化为二元 $[0, \pi]$, 四元 $[0, (\pi/2), \pi, (3\pi/2)]$ 或多元位相. 一般情况下, 输入 f 与输出 g 之间的关系可表为

$$g = Hf, \quad (1)$$

式中 H 为光的空间传播. 如它为自由空间传播, 即为菲涅耳衍射. 这时(1)式成为

$$g_k = \sum_{i,j} \left\{ f_{ij} \exp \left[j \frac{2\pi}{N} (i^2 + j^2) \right] \right\} \text{EXP} \left[-j \frac{2\pi}{N} (ik + jl) \right]. \quad (2)$$

菲涅耳衍射的计算可以通过将位相函数乘上二次位相因子后作傅里叶变换而得到. 如果其间存在一透镜, 则为傅里叶变换关系

$$g_k = \sum_{i,j} f_{ij} \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} (ik + jl) \right]. \quad (3)$$

应用衍射光学元件的目的就是在要输出平面上获得所需要的目标函数 $\hat{g}(u, v)$. 可以定义一个评价函数, 即误差函数 e 为

$$e = \| |g|^2 - |\hat{g}|^2 \|^2 = \sum_i | |g_i|^2 - |\hat{g}_i|^2 |^2, \quad (4)$$

优化就是要使得到的输出 g 尽可能接近所要求的输出 \hat{g} , 即使误差函数 e 达极小值. 一般说来, 所要综合的是获得某种光强度分布. 例如一对多个节点光学互连所需的光点阵列. 实际上, 一片位相片的系统由于调整的自由度不足, 只能实现在输出面上光强度的调制, 而不能达到同时调制光强与位相的目的. 因此, 误差函数定义为实际输出光强度与目标光强度之差.

通常, 在用计算机进行优化计算时, 将大量重复进行(2)式或(3)式的运算. 对于高采样的系统是十分费时的. 众所周知, 光学具有并行处理能力, (2)式与(3)式的运算可以用光学方法

以极高的速度完成. 如采用图 2 的光电混合处理系统, 将有可能发挥光学数据处理的优势. 图中衍射光学元件可采用电寻址的位相型空间光调制器, 例如我们利用的运转于二元位相模式

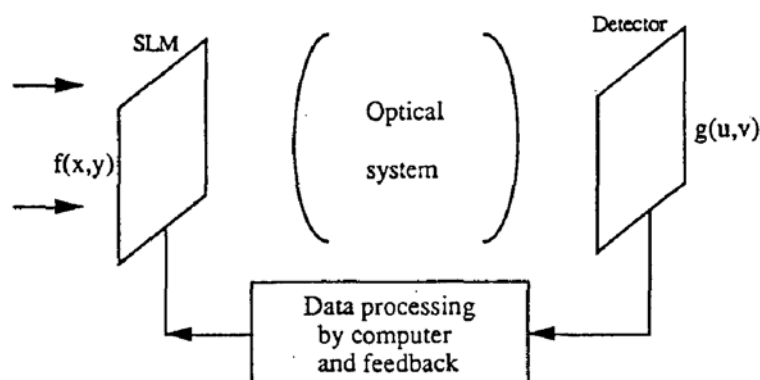


Fig. 2 Opto-electronic hybrid processing system

下的缺电液晶空间光调制器^[11]. 将计算的数据输入空间光调制器(SLM), 在输出面上放置光电探测器. 将接收的电信号输入计算机进行计算后, 所得的结果再显示在 SLM 上, 以实现迭代运算. 这个系统的主要优点在于, 整个优化过程在实际使用的光学系统上进行. 因此, 优化自动地计入了实际光学系统中的像差、缺陷等因素. 换句话说, 光学系统的缺陷自动地得到补偿. 本文将讨论在光电混合处理系统中进行优化运算所引起的问题, 比较优化法的演绩.

3 用于衍射光学元件优化设计的遗传算法

简单遗传法通常由以下三个操作组成: 繁殖, 交换基因和实变^[8]. 繁殖中优生过程, 是将各基因链根据其评价函数值的存优去劣进行繁殖. 新繁殖的链放入交配池中随机地一对一进行交配, 参与交配的一对链交换基因. 最后以一定几率发生突变. 交换基因是遗传的关键, 而突变起第二位的作用.

本文中所用的遗传算法综合如下:

1) **初值**: 随机产生或根据一定条件产生一组由 M 个组态构成的物函数(二元位相函数) $\{f_i, i = 1, M\}$. 计算它们相应的评价函数 $\{C_i, i = 1, M\}$. 物函数的维数为 N .

2) **繁殖**: 在 M 个物样本中选取 L 个具有较佳的评价函数的样本作为配种. 略去 $M - L$ 个差的物样本.

3) **交换基因**: L 个配种中每二个基因链之间按以下方法进行基因交换. 任取一个随机整数 k , 将二个基因链的 k 到 N 间元素互相交换. 形成 $M - 1$ 个后代. 为了得到所有可能的交配组合, L 应满足关系 $M - 1 = 2 \times C_L^2$. 例如当 $M = 7$ 时, $L = 3$.

4) **突变**: 突变就是在链的某个随机位置上元素值的随机变化. 在二元编码的问题中, 仅是简单地将零变为一, 或变一为零. 发生突变的几率是

$$P = P_0 \left(\frac{1}{IT} \right)^r$$

式中 P_0 为突变发生的初始几率, r 为一个参数. 它们取决于要处理的特定问题, IT 为迭代的次数. 通常 P_0 可取为 $0.1 \sim 0.2$. r 的大小可根据在迭代终结时使发生突变的数目降到零来决定. 在链中有多少位发生突变的数目 $N_{mut} = P \times N$. 在执行哪一位发生突变是随机产生的.

5) **估价**: 在以上过程中始终保持一个当时具有最佳评价值的样本不受扰动. 此样本加上

$M - 1$ 个新样本, 构成 M 个新一代样本. 计算它们相应的评价函数. 重复步骤 2) 到 5), 从而完成迭代运算.

本算法与文献[9]的算法在以下几点上不同. 首先, 文献[9]中的算法是序列算法, 在每次迭代中只改变一个样本. 而修改后的算法, 在每次迭代中将会出现 $M - 1$ 个不同的样本. 可以用 $M - 1$ 个并行通道处理. 因此原则上这是一个并行算法. 如果采用并行处理器, 如 *fransputer* 则运算速度可以大大加快. 在一个高维寄空间中搜索一个问题的最优解总是包含着两个互相矛盾的因素: 利用与搜索. 在每次迭代中本算法保持当前的最佳样本不受扰动, 而其余 $M - 1$ 个样本由原样本经交配与突变产生. 这样充分利用了当前已获得的最佳解, 同时尽可能全面地在空间中搜索. 因此, 这是一个十分有效的算法.

算法的模拟计算首先是设计一个二元位相调制的聚光学元件. 由于它的解是已知的菲涅耳波带片, 因此容易验明算法的特性. 这时的目标函数为在原点上的一点, 即 $|\hat{g}_{00}|^2 = 1$. 利用遗传算法对不同参数的计算结果如表 1 中给出. 计算中的初值采用随机二元位相. 从表 1 可以看出, 该算法的最重要参数是: 在整个优化过程中出现的样本总数(NSA). 它依赖于问题的维数, 而与每次迭代中出现的样本数 M 无关. 这个总数大约为 $10 N^2$. 如果样本总数小于 $10 N^2$, 发生早熟现象, 通常得不到最佳解.

Table 1 Simulation results of binary phase focusing element with different parameters of genetic algorithm, where N is the dimensuion of problem, M is the number of the members in a population

$N \times N$	M	L	Number of NSA	efficiency (%)
16×16	7	3	1500	41.7
	13	4	1800	40.9
32×32	7	3	9000	39.9
	13	4	10000	40.4
64×64	7	3	36000	40.3
	13	4	40000	40.5

文献[10]认为, 遗传算法只适用于二元量化问题. 实际上与模拟退火法一样, 可以解决多元量化问题. 表 2 给出了具有多元位相的会聚光学元件设计的计算结果. 可以看出, 遗传算法同样可以找到最佳解. 与二元问题的唯一差别在于, 迭代总数提高了 $(NL - 1)$ 倍, 为 $10 N^2(NL - 1)$, 即增加了可能出现的组合状态的数目.

Table 2 Simulation results of focusing element with multi-phase level by genetic algorithm ($m = 7, L = 3$)

$N \times N$	phase level NL	number of NSA	% efficiency (optimized)	% efficiency (theoretical)
16×16	4	7200	79.9	81.1
	8	25000	94.4	95.0
32×32	4	29000	79.3	81.1
	8	80000	92.2	95.0

利用上述算法已成功进行了产生 8×8 光点阵的 Dammann 光栅的优化设计. 其输入与输

出间的关系用(3)式表之. 评价函数为 $K \times K$ 个光点的目标强度 $|\hat{g}_{kl}|^2 = 1/K^2$ 与由二元位相片产生的实际输出光强度 $|g_{kl}|^2$ 之间的平方

$$C_1 = \sum_{k,l} ||g_{kl}|^2 - |\hat{g}_{kl}|^2|^2. \quad (5)$$

通常, 二维 Dammann 光栅的优化设计方法是先对一维 K 个光点列阵的目标函数作一维优化, 然后将一维结构垂直交叉构成二维图形, 从而得到 $K \times K$ 个光点列阵输出. 一维优化可以得到的最高衍射效率为 80%. 用这种办法可达到的二维光点列阵的最高衍射效率仅为 64%. 然而, 如果直接按二维结构进行优化, 可以调节的自由度由一维情况下的 N 增加到二维的 N^2 . 因此可以期待直接二维优化将会得到更好的结果.

实际上, 在优化计算中要考虑两个互相矛盾的因素: 衍射效率与光点列阵的均匀度, 均匀度可定为

$$C_2 = \frac{|g_{\max}|^2 - |g_{\min}|^2}{|g_{\max}|^2} \quad (6)$$

为了得到二者的一种折衷, 可采用组合评价函数

$$C = \mu C_1 + (1 - \mu) C_2 \quad (7)$$

式中参数 μ 的大小取决于优化中要强调高效率还是高均匀度. 若 μ 取接近于 1 的值, 可能得到高效率, 但低均匀度的光点列阵. 因此必须适当选择 μ 的大小.

在本文的计算中对具有 128×128 个像素的位相片分为 2×2 个单元, 每个单元为 64×64 个像素. 目标函数为 8×8 光点列阵, 用遗传算法直接进行二维结构优化. 结果得到 75% 的衍射效率以及 5% 以下的均匀度. 这接近于一维优化的极限衍射效率. 图 3 为优化的 Dammann 光栅结构. 显然, 它打破了简单的对称性, 获得了更大的调节自由度. 将图 3 的数据输入运转在二元位相下的铁电液晶空间光调制器. 用激光照明后在透镜的后焦面上可以得到所要求的光点列阵输出. 图 4 是实验所得的 8×8 光列阵输出.

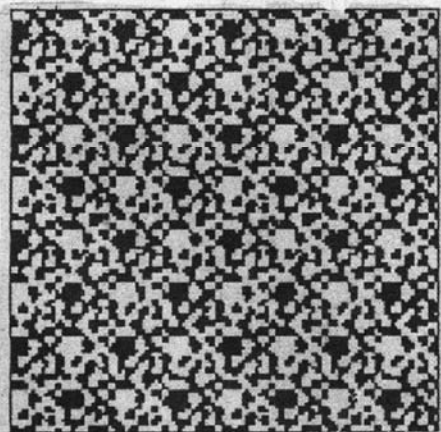


Fig. 3 The Dammann grating structure by using genetic algorithm, where the pixel with white represents zero phase and the black π phase

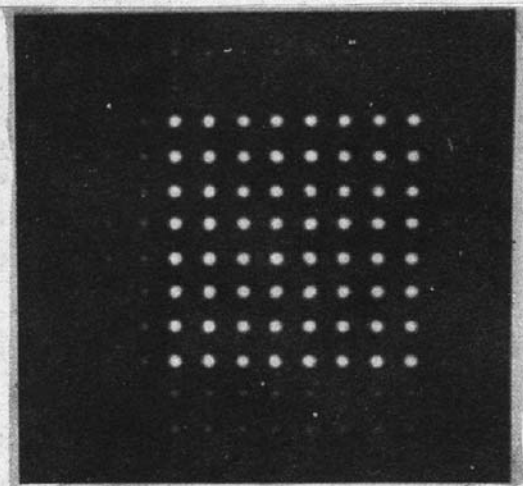


Fig. 4 The experimental result of 8×8 array generation by loading the data of Fig. 3 unto ferro-electric liquid crystal SLM operated in binary phase mode

4 利用位相自由度初值化以提高收敛速度

对于大多数衍射光学元件的应用, 关心的是输出的光强度分布, 而不管其位相如何. 因此有可能利用位相自由度综合出一个误差较小的初值分布, 以提高算法的收敛速度. 这个步骤称

为初值化. 具有 0 和 π 位相的二元位相函数是实函数. 一个实函数的傅里叶变换具有以下对称性

$$F(i, j) = F^*(-i, -j) \quad (8)$$

利用这个性质, 可以构造一个位相编码的目标函数 $F(i, j)$, 使它满足 (8) 式. 对于产生 8×8 光点列阵的初值化, 可以将光点列阵的光强度乘上具有复共轭对称性的随机位相. 它的傅里叶变换为实函数 $f(k, l)$. 可以应用以下的规则进行量化

$$f_i(k, l) = \begin{cases} 1, & f(k, l) \geq 0 \\ -1, & f(k, l) < 0 \end{cases}$$

从而得到二元位相分布的初值. 这种位相编码方法在量化时不会引起任何位相误差, 只是强加了均匀振幅的要求. 事实上, 所用的随机位相编码等价于放置一个漫射器. 漫射器的效应将使其相应的频谱趋于均匀化, 这较接近于对位相函数进行均匀照明的情况.

对产生的 8×8 光点列阵模拟计算. 图 5 给出初值化与随机初值条件下收敛性质的比较. 可以看出, 初值化解的误差比随机初值解的误差要小 5 到 10 倍. 这样计算可以从较接近最佳解的起点开始. 其速度比随机初值要提高 2~3 倍.

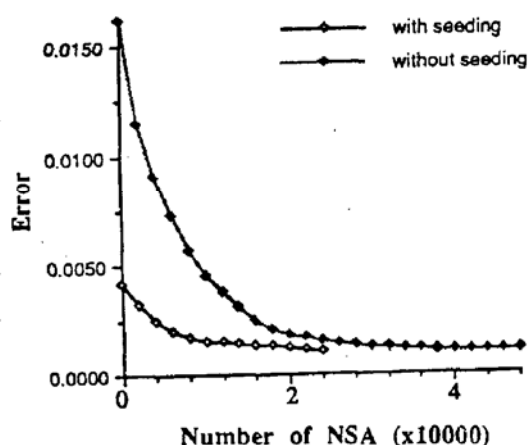


Fig. 5 Convergence properties of generating 8×8 spots with and without seeding by GA

5 遗传算法与模拟退火算法的比较

遗传算法与模拟退火算法存在着相似性. 在迭代过程中模拟退火算法可以接受具有较高评价函数的新组态. 这提供了跳出局部极小解, 找到整体极小解的可能性. 这种情况在遗传算法中以不同的机制出现. 在交换基因与突变之后, 可以出现具有较高评价函数的新组态. 然而, 在每次迭代中总是保持当前的最佳值解不受扰动, 直到找到一个更好的解为止. 因此, 遗传算法保持了快速下降的形式, 同时提供了随机搜索的能力, 从而避免陷入局部极小解.

一般说来, 模拟退火算法需要经几十次迭代以得到好的结果, 在每次迭代中将出现 N^2 个样本. 故样本出现的总数为 $10 \sim 20 N^2$, 这与遗传算法有相同的量级. 实际上, N 位二进制链可能出现的组态总数为 2^N . 当 $N = 64$ 时, 在优化中样本出现的总数与组态总数之比为 $10N^2/2^N \simeq 2 \times 10^{-15}$. 因此, 在优化过程中只试了极少部分的可能组态. 这表明了这二种算法的有效性.

下面对两种算法的计算速度作一比较. 在遗传算法中可采用快速傅里叶变换. 但在模拟退火算法中对一样本只需要计算一点的傅里叶变换, 即需要 N^2 次运算. 如上述所述, 两种算法需要作傅里叶变换的总数为 $10 N^2$. 故用遗传算法总的运算数为 $10 N^4 \log_2 N^2$, 而用模拟退火法为 $10 N^4$. 当 $N = 64^2$ 时, 模拟退火算法比遗传算法快 24 倍. 实际上, 误差函数只需要计算小数量的点, 例如计算会聚光学元件只需要估计一个中心. 因此, 模拟退火法有时会比遗传算法快二个数量级. 如果采用图 2 所示的光电混合处理系统. 两种算法所需的傅里叶变换总数相同, 而光学傅里叶变换速率是一样的. 故它们的计算速度将没有差别. 因此, 原则上这两种算法均可应用于光电源混合处理系统.

以上的讨论均是经计算机模拟, 即在没有噪声的条件下进行的. 然而在光电混合处理系统中实际输出的测量存在着噪声. 它可能来自于电子放大器, 光学系统, 光源以及空间光调制器的噪声. 噪声的振幅可能达信号的百分之几. 因此有必要对噪声的演绩作一分析. 这时 (2) 式与

(3)式成为

$$g = Hf + n \quad (9)$$

$$e = \| |g|^2 - |\hat{g}|^2 \|^2 = \sum_i | |g_i|^2 - |\hat{g}_i|^2 + n_i |^2 \quad (10)$$

假定噪声具有均匀统计分布与零均值. 在模拟计算中对每个目标点上的输出, 在计算出误差后加上如下噪声

$$n_i = (-1)^i \hat{g}_i \eta_n R_n \quad (11)$$

式中 η_n 为实际输出信号 g_i 的噪声百分比振幅, R_n 为在零与一之间的具有均匀分布的随机数, i 为随机整数. 在执行模拟退火法中, 在空间光调制上每改变一个像素的位相值后, 要估计一次相应的误差函数. 改变位相值前、后的误差函数的差值对于判断该变化是可以接受起关键作用. 当噪声出现时将会出现误判断. 可以想像, 模拟退火法对噪声是敏感的. 为此, 在相同条件下对不同的噪声振幅作模拟计算. 图 6 为计算结果. 可以看出, 当噪声振幅 η_n 小于 0.1% 时, 不出现任何结果的蜕化. 但当 $\eta_n > 1\%$ 时, 模拟退火法将不能收敛到一个合理的结果.

然而, 遗传算法比模拟退火法有更好的抗噪声能力. 图 7 给出了在不同噪声水平下, 遗传算法的收敛特性. 可以看出, 甚至在 5% 的噪声水平下, 仍可以收敛到一个可以接受的解, 这是由于遗传算法是一个按组态的优化算法, 它总是保持具有较好评价函数的组态, 而弃去那些较差的. 因此, 噪声引起的误判不会对结果造成严重的影响.

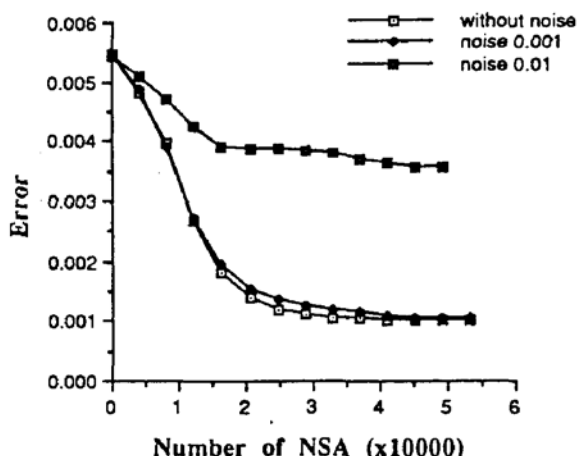


Fig. 6 The converge property of SA with different noise levels

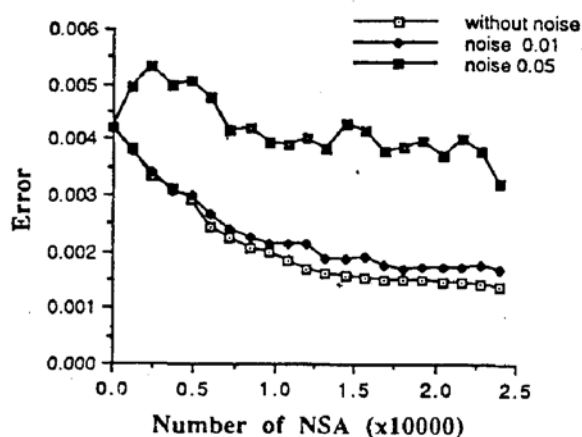


Fig. 7 The converge property of 遗传算法 with different noise levels

六 结 论

本文的结果说明, 对于衍射光学元件的设计遗传算法是一个有效的优化算法. 它可应用于二元以及多元位相调制的情况. 本文提供了算法具体实施的规则. 与模拟退火法比较表明, 两种算法具有一定的相似性. 用计算机作运算时, 模拟退火法的收敛速度比遗传算法快得多. 而当应用于光电混合处理系统时, 它们有相似的表现. 然而, 模拟计算表明, 遗传算法具有较好的抗噪声能力. 因此, 遗传算法不仅提供了一种具有不同思路的替代办法去解决高维函数问题的优化, 而且更适于用光电混合处理系统进行优化设计.

本工作得到美国科学与工程研究委员会(Science and Engineering Research Council)的资助. 曾与 E. G. S. Paige, M. A. A. Neil 和 S. E. Broomfield 进行过有益的讨论. 在此表示深切感谢!

参 考 文 献

- [1] M. A. Seldowitz, J. P. Allebach, D. W. Sweeney, Synthesis of digital holograms by direct binary search. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(14):2788
- [2] J. R. Fienup, Iterative method applied to image reconstruction and computer-generated holograms. *Opt. Eng.*, 1980, **19**(2):297
- [3] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, Jr. M. P. Vecchi, Optimization by simulated annealing. *Science*, 1983, **220**(7):671
- [4] M. R. Feldman, C. C. Guest, Iterative encoding of high-efficiency holograms for generation of spot arrays. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(10):479
- [5] M. P. Dames, R. J. Dowling, P. McKee *et al.*, Efficient optical elements to generate intensity weighted spot arrays: design and fabrication. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(19):2685
- [6] M. S. Kim, M. R. Feldman, C. C. Guest, Optimum encoding of binary phase-only filters with a simulated annealing algorithm. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(11):545
- [7] G. G. Yang, Optimal design of high efficiency optical interconnection system with a simulated annealing algorithm. *Third International Conference on Holographic Systems, Components Applications*, Edinburgh, UK, Sept., 1991, P. 45
- [8] D. E. Goldberg, *Genetic algorithm in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1987
- [9] U. Mahlab, J. Shamir, H. J. Caulfield, Genetic algorithm for optical pattern recognition. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(12):648
- [10] U. Mahlab, J. Shamir, Iterative optimization algorithms for filter generation in optical correlator: a comparison. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(8):1117
- [11] S. E. Broomfield, M. A. A. Neil, E. G. S. Paige *et al.*, Programmable binary phase-only optical device based on ferro-electric liquid crystal SLM. *Electron. Lett.*, 1992, **28**(1):26

Genetic algorithm to the optimal design of diffractive optical elements and its comparison with simulated annealing algorithm

YANG Guoguang*

(Graduate School, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039)

(Received 28 September 1992; revised 30 December 1992)

Abstract

In this paper we successfully apply the modified genetic algorithm to the optimal design of diffractive phase optical elements with high demension. Its comparison to simulated annealing algorithm is also discussed. The results show that genetic algorithm not only can be applied to the optimal design of diffractive optical element with ninary phase, also with the multi-level phase. Especially, it suits to implement in an opto-electronic hybrid system.

Key words diffractive optical elements, genetic algorithm, simulated annealing algorithm.

* Present address: Department of Engineering Science, University of Oxford, Oxford OX1 3PJ, UK