第 13 卷 第 5 期
1993 年 5 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 13, No. 5
May, 1993

依赖强度耦合 J-C 模型中场的位相特性*

周 鹏**
(湖北教育学院物理系，武汉 430060)
彭金生** 李高翔**
(华中师范大学物理系，武汉 430070)

提 要

应用 Pegg-Barnett 位相理论研究了依赖强度耦合 JC 模型中场位相的动力学和统计性质. 在一定条件下，场可展示锁相和位相压缩效应以及保持光子数-位相最小确定态.

关键词 位相特性， 依赖强度耦合 J-C 模型.

1 引 言

关于量子场的位相问题，是目前量子光学的热点之一. Pegg 和 Barnett 建立了厄米位相算符[1~3]. 许多研究者则应用这一理论广泛地研究了不同量子场的位相性质[4,5]，及原子与量子场的相互作用对其位相动力学的影响[6~10]等. 这些研究表明：不同的物理系统其位相特性上不同的.

本文将讨论原子与场的强度依赖相互作用体系中场的位相动力学和统计性质.

原子与场的强度依赖耦合模型是 Buck 和 Sukumar 为反映原子和场的相互作用对场强度的依赖性而提出的理论模型(通常称作依赖强度耦合 Jaynes-Cummings 模型[11]. 其哈密顿量为：

$$\hat{H} = \omega\hat{a}^{+}\hat{a} + \omega_0\hat{S}_z + \varepsilon(\hat{S}_{+}\hat{a}\sqrt{\hat{a}^{+}\hat{a}} + \sqrt{\hat{a}^{+}\hat{a}}\,\hat{a}^{+}S_{-}) \qquad (\hbar = 1) \tag{1}$$

式中 $\hat{a}^{+}$ 和 $\hat{a}$ 为频率 ω 的单模场的产生和消灭算符；$\hat{S}_z$ 和 $\hat{S}_{\pm}$ 为原子的反转和跃迁算符，其跃迁频率为 ω_0；ε 为原子和场的耦合系数.

该模型是可精确求解的[11,12]. 不失一般性，假定原子初始处在相干激发状态(即基态 $|-\rangle$ 和激发态 $|+\rangle$ 的相干迭加态)

$$|r\rangle = \cos(\beta/2)|+\rangle + \exp(-i\eta)\sin(\beta/2)|-\rangle, \tag{2}$$

而场处于相干态

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n|n\rangle = \exp(-\bar{n}/2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{3}$$

这里 $0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$o\leqslant\eta\leqslant 2\pi$ 反映原子的极化状态；$\alpha=\sqrt{\bar{n}}\exp(i\varphi)$，$\bar{n}$ 和 φ 为场的平均光子数

收稿日期：1992 年 3 月 24 日；收到修改稿日期：1992 年 6 月 15 日
* 国家自然科学基金资助项目.
** 中国高等科学技术中心(世界实验室).

和激发方向角. 则系统在共振情况下($\omega = \omega_0$) 演化到任意时刻的状态为：

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \exp(-i\hat{H}t)|\alpha\rangle \otimes |r\rangle \\
&= \sum_n [A_n(t)|+,n\rangle + B_n(t)|-,n\rangle]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
A_n(t) = &\exp[-i(n+1/2)\omega t]\{P_n\cos(\beta/2)\cos[(n+1)\varepsilon t] \\
&- iP_{n+1}\exp(-i\eta)\sin(\beta/2)\sin[(n+1)\varepsilon t]\}, \\
B_n(t) = &\exp[-i(n-1/2)\omega t][P_n\exp(-i\eta)\sin(\beta/2)\cos(n\varepsilon t) \\
&- iP_{n-1}\cos(\beta/2)\sin(n\varepsilon t)],
\end{aligned}
\right\}
\tag{5}
$$

2　场的位相性质

引入 Pegg-Barnett 厄米位相算符. 基于有限的 $s+1$ 维希尔伯特(Hilbert)空间 ψ 的一组正交完备基矢 $|\theta_m\rangle(m = 0,1,2,\cdots,s)$，这算符可定义为[1~3]：

$$
\phi = \sum_{m=0}^{s} \theta_m |\theta_m\rangle\langle\theta_m|,
\tag{6}
$$

这里 $|\theta_m\rangle$ 被定义为：

$$
|\theta_m\rangle = (s+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{s}\exp(in\theta_m)|n\rangle,
\tag{7}
$$

式中 $|n\rangle$ 为光子数态，$\theta_m = \theta_0 + 2\pi m/(s+1)$，$\theta_0$ 为一参考位相. 显然，$|\theta_m\rangle$ 和 θ_m 分别为位相算符 ϕ 的本征态和本征值.

依据这定义，么正位相指数算符可表为[1~3]：

$$
\widehat{\exp}(i\phi) \equiv \exp(i\phi) = \sum_{n=0}^{s-1} |n\rangle\langle n+1| + \exp[i(s+1)\theta_0]|s\rangle\langle 0|,
\tag{8}
$$

且 $\widehat{\exp}(-i\phi) = [\widehat{\exp}(i\phi)]^{+}$. 相应地，可按通常的形式定义余弦和正弦位相符算：

$$
\widehat{\cos}\,\phi = \frac{1}{2}[\widehat{\exp}(i\phi) + \widehat{\exp}(-i\phi)], \qquad \widehat{\sin}\,\phi = \frac{1}{2i}[\exp(i\phi) - \widehat{\exp}(-i\phi)].
\tag{9}
$$

不难看出，(9)式自然满足

$$
(\widehat{\cos}\,\phi)^2 + (\widehat{\sin}\,\phi)^2 = 1
\tag{10}
$$

然而，按照 Susskind-Glogower 位相理论[13]并不能得到这一反映位相基本属性的结论.

根据 Pegg 和 Barnett 的假定，所有计算均涉及在有限的 $s+1$ 维希尔伯特空间 ψ 里进行，一旦某个量的期待值求出后，s 将趋于无穷大. 对于实际的物理状态而言[1~3]：

$$
\langle\widehat{\exp}(i\phi)\rangle_p = \langle(\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n+1|)\rangle_p
\tag{11}
$$

结合(4)式，不难求出指数位相算符在状态 $|\psi(t)\rangle$ 下的期待值.

$$
\begin{aligned}
\langle\widehat{\exp}(i\phi)\rangle = &\exp(-i\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}\{P_n^{*}P_{n+1}\cos(\varepsilon t) \\
&- \frac{i}{2}[|P_n|^2\exp(i\eta) + P_n^{*}P_{n+2}\exp(-i\eta)]\sin\beta\sin(\varepsilon t)\}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

因此，依赖强度耦合 J-C 模型中场的余弦和正弦位相算符期待值随时间变化的规律为：

$$\left.\begin{aligned}\langle \widehat{\cos}\,\phi\rangle &= \frac{1}{2}[\langle \widehat{\exp}\,(i\phi)\rangle + \langle \widehat{\exp}\,(-i\phi)\rangle] \\ &= \cos(\varepsilon t)\cos(\varphi-\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}|P_nP_{n+1} + \frac{1}{2}\sin(\varepsilon t)\sin\beta \\ &\quad\times[\sin(\eta-\omega t)+\sin(2\varphi-\eta-\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}|P_nP_{n+2}|], \\ \langle \widehat{\sin}\,\phi\rangle &= \cos(\varepsilon t)\sin(\varphi-\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}|P_nP_{n+1}| - \frac{1}{2}\sin(\varepsilon t)\sin\beta \\ &\quad\times[\cos(\eta-\omega t)+\cos(2\varphi-\eta-\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}|P_nP_{n+2}|].\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(13)式反映了一般情况下原子与场的相互作用对$\langle \widehat{\cos}\ \phi\rangle$和$\langle \widehat{\sin}\ \phi\rangle$的影响. 如果原子初始处于激发态($\beta=0$)或基态($\beta=\pi$)时，(13)式变成：

$$\begin{aligned}&\langle \widehat{\cos}\,\phi\rangle = \langle \widehat{\cos}\,\phi\rangle_a\cos(\varepsilon t), \qquad \langle \widehat{\sin}\,\phi\rangle = \langle \widehat{\sin}\,\phi\rangle_a\sin(\varepsilon t) \\ &\langle \widehat{\cos}\,\phi\rangle_a = \cos(\varphi-\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}|P_nP_{n+1}|, \qquad \langle \widehat{\sin}\,\phi\rangle_a = \sin(\varphi-\omega t)\sum_{n=0}^{\infty}|P_nP_{n+1}|\end{aligned} \tag{14}$$

即原子与场的作用使得相干态情况下的$\langle \widehat{\cos}\ \phi\rangle_a$和$\langle \widehat{\sin}\ \phi\rangle_a$受同一个缓变振荡因子$\cos(\varepsilon t)$的调制. 与原始的 J-C 模型不同的是这一调制因子只与原子和场的耦合系数ε有关，而与场的平均光子数$\bar{n}$无关.

应用(4)和(7)式，$|\psi(t)\rangle$状态下场的位相概率分布函数为

$$\begin{aligned}P(\theta_m) &= |\langle\theta_m|\psi(t)\rangle|^2 \\ &= (s+1)^{-1}[|\sum_{n=0}^{s}An(t)\exp(-in\theta_m)|^2 + |\sum_{n=0}^{s}B_n(t)\exp(-in\theta_m)|^2],\end{aligned} \tag{15}$$

若只考虑强场($\bar{n}\gg1$)情况的位相性质，则此时的泊松分布可近似地用高斯分布代替[2]：

$$|P_n|^2 = \exp(\bar{n})\frac{\bar{n}^n}{n!} \approx (2\pi\bar{n})^{-1/2}\exp[-\frac{(\bar{n}-n)^2}{2\bar{n}}] \tag{16}$$

在连续谱极限($s\to\infty$)下，θ_m变成连续变量θ，相应地求和用适当的积分取代，可求得：

$$\begin{aligned}P(\theta) = \frac{\sqrt{2\pi\bar{n}}}{s+1}\{&\exp[-2\bar{n}(\varphi-\theta-\omega t+\varepsilon t)^2][1-\sin\beta\cos(\eta-\theta-\omega t+\varepsilon t)] \\ &+\exp[-2\bar{n}(\varphi-\theta-\omega t-\varepsilon t)^2][1+\sin\beta\cos(\eta-\theta-\omega t-\varepsilon t)]\end{aligned} \tag{17}$$

且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(\theta)\frac{s+1}{2\pi}d\theta = 1 \tag{18}$$

这里$(s+1)/2\pi$是位相态的态密度. 从(17)式可以看出：

1)　如果原子与场的耦合很弱($\varepsilon\ll\omega$)，以至ε项与ω项相比可以省去，此时

$$P(\theta) = P_a(\theta) = \frac{\sqrt{8\pi\bar{n}}}{s+1}\exp[-2\pi(\varphi-\theta-\omega t)^2] \tag{19}$$

即位相概率分布呈单峰高斯分布，其效果等价于相干态自由演化时的位相分布$P_a(\theta)$[2].

2)　若原子与场的相互作用较强，且原子初始处于非相干激发态(即激发态$\beta=0$)或基态(即$\beta=\pi$)，则(17)式变成：

$$P(\theta) = \frac{\sqrt{2\pi\bar{n}}}{s+1}\{\exp[-2\bar{n}(\varphi-\theta-\omega t+\varepsilon t)^2] + \exp[-2\bar{n}(\varphi-\theta-\omega t-\varepsilon t)^2]\} \tag{20}$$

即原子与场的耦合使得初始场的位相分布$P_a(\theta)$的单峰高斯分布分裂为两个相似的高斯分布，其行为象似初始场的频率ω分裂为两个频率$\omega\pm\varepsilon$，显然，这一分裂仅依赖于耦合系数ε. 由

于(20)式代表原子初始处在基态或激发态时的位相概率分布，它暗示两种初始条件对应的场的位相性质相同. 然而场有压缩和反聚束效应明显地依赖于原子的初始状态[14].

3)　如果原子初始处于相干激发($\beta \neq 0$ 或 π)，此时场的位相分布由(17)式表示. 可以看出，$P(\theta)$ 仍呈双峰结构，但每个峰的幅值受因子$[1 \mp \sin\beta\cos(\eta - \theta - \omega t \pm \varepsilon t)]$的调制. 这调制周子反映了原子的相干性对场的位相概率分布的影响.

利用(17)式可求得连续极限下位相算符的平均值：

$$\langle \hat{\phi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta P(\theta) \frac{s+1}{2\pi} d\theta = \varphi - \omega t - \varepsilon t \sin\beta\cos(\eta - \varphi) \tag{21}$$

若原子初始处于基态或激发态时，(21)式为：

$$\langle \hat{\phi} \rangle = \varphi - \omega t \tag{22}$$

即此时原子与场的相互作用并不影响位相的平均值的演化.

如果选取适当的参数使得 $\sin\beta\cos(\eta - \varphi) = -\omega/\varepsilon$，由(21)式给出：

$$\langle \hat{\phi} \rangle = \varphi \tag{23}$$

即场位相的平均值与时间无关，在依赖强度耦合 J-C 模型的整个时间演化过程中保持为常数. 这一结论通常称为锁相(phase locking)效应. 产生这一效应的原因是由原子初始相干性($\sin\beta \neq 0$) 的存在[12].

3　位相涨落和数-位相测不准关系

按照(17)式，$\hat{\phi}^2$ 的期待值为：

$$\begin{aligned}\langle \hat{\phi}^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 P(\theta) \frac{s+1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{4\bar{n}} + (\varphi - \omega t)^2 + \varepsilon^2 t^2 - \varepsilon t \sin\beta[\sin(\eta - \varphi) + 2(\varphi - \omega t)\cos(\eta - \varphi)]\end{aligned} \tag{24}$$

相应的位相涨落不难给出

$$\begin{aligned}(\Delta \hat{\phi})^2 &= \langle \hat{\phi}^2 \rangle - \langle \hat{\phi} \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4\bar{n}} - \varepsilon t \sin\beta\sin(\eta - \varphi) + [1 - \sin^2\beta\cos^2(\eta - \varphi)]\varepsilon^2 t^2\end{aligned} \tag{25}$$

式中右边第一次表示相干态的位相涨落[2]，而其余项代表原子与场的耦合对位相涨落的影响. 一般地，这影响将使得位相涨落增加. 然而，若选取 $\sin(\eta - \varphi) > 0$，则在时间 t

$$t < \frac{\sin\beta\sin(\eta - \varphi)}{\varepsilon[1 - \sin^2\beta\cos^2(\eta - \varphi)]} \tag{26}$$

的范围内，位相涨落小于相干态的位相涨落，

$$(\Delta \hat{\phi})^2 < (\Delta \hat{\phi})_a^2 = \frac{1}{4\bar{n}} \tag{27}$$

此时场所对应的是位相压缩态(phase squeezed state).

如果选取 $\beta = \pi/2, \eta = \varphi$，从(25)式可得：

$$(\Delta \hat{\phi})^2 = (\Delta \hat{\phi})_a^2 = \frac{1}{4\bar{n}} \tag{28}$$

即原子与场的相互作用并不影响场的位相涨落. 实际上，$\beta = \pi/2, \eta = \varphi$ 所对应的原子初态

$$|r_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + \exp(-i\varphi)|-\rangle) \tag{29}$$

是相干捕获态(Coherent trapping state)[12],原子以此态开始与场耦合时,基本上不改变初始场的统计性质.这一特点也可从光子数-位相测不准关系中近似地反映出来.

利用(4)式,光子数的涨落可以表为:

$$\begin{aligned}(\Delta\hat{N})^2 &= \langle(\hat{a}^+\hat{a})^2\rangle - \langle\hat{a}^+\hat{a}\rangle^2 \\ &= \bar{n} + \frac{1}{2} + \sin^2(\beta/2)\exp[-2\bar{n}\sin^2(\varepsilon t)]\cos[\bar{n}\sin(2\varepsilon t)] \\ &\quad - \frac{1}{4}\cos^2\beta - (1+\cos\beta)W(t) - W^2(t)\end{aligned} \tag{30}$$

这里 $W(t) = 1/2\exp[-2\pi\sin^2(\varepsilon t)]\{\cos\beta\cos[\bar{n}\sin(2\varepsilon t)] - \sin\beta\sin(\eta-\varphi)\times\sin[\bar{n}\sin(2\varepsilon t)]\}$

一般来说:

$$(\Delta\hat{N})^2(\Delta\hat{\phi})^2 > \frac{1}{4} \tag{31}$$

即原子与场的相互作用使得场偏离原来的光子数-位相最小不确定态.但是,若原子初始处在相干捕获态 $|r_c\rangle$ 时,在强场近似($\bar{n}\gg 1$)下,(30)式可近似表为:

$$(\Delta\hat{N})^2 \approx \bar{n} \tag{32}$$

结合(28)和(32)式,此时场的数-位相测不准乘积是

$$(\Delta\hat{N})^2(\Delta\phi)^2 \approx \frac{1}{4} \tag{33}$$

即场可近似地认为仍然保持数-位相最小不确定态——相干态.或等效地说,原子与辐射场的相互作用在这种情况下基本上不改变初始场的位相统计性质.

4 小 结

总之,我们应用 Pegg-Barnett 最近发展的厄米位相理论系统地讨论了依赖强度耦合的 J-C 模型中场的位相性质,其结果表明,若适当的选取系统的初始状态,锁相和位相压缩效应可以发生,场可以保持数-位相最小不确定态不变.

参 考 文 献

[1] D. T. Pegg, S. M. Barnett, Unitary phase operator in quantum mechanics. *Europhys. Lett.*, 1988, **6**(6):483～487

[2] S. M. Barnett, D. T. Pegg, On the Hermitian optical phase operator. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(1):7～19

[3] D. T. Pegg, S. M. Barnett, Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field. *Phys. Rev.* (*A*), 1989, **39**(3):1665～1675

[4] J. A. Vaccaro, D. T. Pegg, Phase properties of squeezed states of light. *Opt. Commun.*, 1989, **70**(6):529～534

[5] P. Meystre, J. Slosser, M. Wilkens, Cotangent states of the electromagnetic field:squeezing and phase properties. *Phys. Rev.* (*A*), 1991, **43**(9):4959～4964

[6] H. T. Dung, R. Tanas, A. S. Shumovsky, Collapses, revivals and phase properties of the field in Jaynes-Cummings type modes. *Opt. Commun.*, 1990, **79**(6):462～468

[7] H. X. Meng, C. L. Chai, Phase properties of coherent light in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Lett.* (*A*), 1991, **155**(8-9):500～505

[8] J. S. Peng, G. X. Li, Phase fluctuations of the light in the Jaynes-Cummings model within and without RWA. *Phys. Rev.* (*A*), 1992, **45**(5):3289～3293

[9] J. S. Peng, G. X. Li, P. Zhou, Phase property and atomic coherent trapping in the system of a three-level atom interacting with a bimodal field. *Phys. Rev. A*, 1992, **46**(3):1516～1521

[10] 周鹏, 与原子相互作用的量子场的位相性质.科学通报, 1992, **37**(12):906～910

[11] B. Buck, C. V. Sukumar, Exactly soluble model of atom-photon coupling showing periodic decay and revival. *Phys. Lett. (A)*, 1981, **81**(2-3): 132～135
[12] P. Zhou, Z. L. Hu, J. S. Peng, Effect of atomic coherence on the collapses and revivals in some generalized Jaynes-Cummings models. *J. Mod. Opt.*, 1992, **39**(1): 49-62
[13] L. Susskind, J. Glogower, Quantum mechanical phase and time operator. *Physics*, 1964, **1**(1): 49～61
[14] V. Buzek, Light squeezing in the Jaynes-Cummings model with intensity-dependent coupling. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(9): 1151～1162

Phase properties of the field in the intensity-dependent coupling J-C Model

ZHOU Peng
(*Department of Physics, Hubei College of Education, Wuhan* 430060)
PENG Jinsheng　　LI Gaoxiang
(*Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan* 430070)

(Received 24 March 1992; revised 15 June 1992)

Abstract

The phase dynamical and statistical properties of the field in the intensity-dependent coupling J-C model are studied by using the Pegg-Barnett phase theory. Under certain conditions, the phase locking and squeezing are behaved, and the number-phase uncertainty product becomes the minimum for a coherent state.

Key words　phase property,　intensity-dependent coupling J-C Model.