

# 附加克尔介质 Jaynes-Cummings 模型场的位相特性的位相特性

方卯发

(湖南师范大学物理系, 长沙 410081)

## 提 要

运用 Pegg-Barnett 厄米位相公式, 研究了附加克尔(Kerr)介质 Jaynes-Cummings (J-C) 模型场的位相特性. 具体讨论了场的位相概率分布、厄米位相算符的期待值以及位相的涨落, 通过与标准 J-C 模型作比较, 讨论了克尔介质与模场的非线性相互作用对场位相特性的影响.

**关键词** 附加克尔介质 J-C 模型, Pegg-Barnett 厄米位相公式, 位相概率分布.

## 1 引 言

量子光场的位相问题困扰物理学界达六十多年, 直到最近 Pegg 和 Barnett 提出量子光场厄米位相算符<sup>[1,2]</sup>, 这一问题才得到较好的解决, 使得人们从本质上研究量子光场的位相问题成为可能. 目前, 人们利用 Pegg-Barnett 位相理论对相干态场<sup>[3]</sup>, 压缩态场<sup>[4]</sup>, J-C 模型场<sup>[5]</sup>的位相特性作了广泛的研究. 然而, J-C 模型的另一种推广——附加克尔介质 J-C (以下简称 K-J-C) 模型场的位相特性则少见涉及. 本文运用 Pegg-Barnett 厄米位相公式, 研究了 K-J-C 模型场的位相概率分布、厄米位相算符的期待值以及位相的涨落. 通过数值计算和图解表示, 与标准 J-C 模型场的位相特性作比较讨论了克尔介质与模场的非线性相互作用对模场位相特性的影响.

## 2 K-J-C 模型及其解

单模腔中一个二能级原子被克尔介质所包围, 克尔介质可以模拟成一个频率为  $\omega$  的非简谐振子, 单模场与克尔介质和二能级原子同时耦合相互作用, 这就形成了 K-J-C 模型. 在旋波近似下, 系统的有效哈密顿(Hamiltonian)为<sup>[6]</sup>:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \omega_c(a^\dagger a + 1/2) + \omega_a \sigma_3 + \chi a^{+2} a^2 + \lambda(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \quad (\hbar = 1) \quad (1)$$

$$\omega_c = \omega_0 - g^2/(\omega - \omega_0), \quad \chi = qg^4/(\omega - \omega_0)^4 \quad (2)$$

式中,  $a, a^\dagger$  为腔模场的消灭、产生算符,  $\omega_0$  为其辐射频率,  $\sigma_\pm, \sigma_3$  为原子的赝自旋算符,  $\omega_a$  为二能级原子的跃迁频率,  $\lambda$  为原子与模场的耦合常数;  $q$  为克尔介质的非简谐参量,  $g$  为克尔介质与模场的耦合常数,  $\chi$  为克尔介质第三级非线性极化率的色散部分, 代表克尔介质与模场非线性相互作用的强弱. 相应于(1)式的有效哈密顿的动力学行为可精确求解. 将  $\hat{H}_{\text{eff}}$  分解为:

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_{eff} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \\ \hat{H}_0 &= \omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2} + \sigma_3), \quad \hat{H}_1 = -(\omega_c - \omega_a)\sigma_3 + \chi a^{\dagger 2} a^2 + \lambda(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

不难证明:  $[\hat{H}_0, \hat{H}_1] = 0$ .

设初始时刻原子处于激发态  $|+\rangle$ , 模场处于相干态:

$$\left. \begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{i n \beta} |n\rangle \\ b_n &= \exp(-n_c/2) \frac{(n_c)^{n/2}}{\sqrt{n!}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中  $n_c$  为初始相干模场的平均光子数,  $\beta$  为位相角 ( $0 \leq \beta \leq 2\pi$ ). 因此, 系统的初始态矢为:

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle \otimes |+\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{i n \beta} |n, +\rangle \quad (5)$$

在相互作用绘景中, 薛定谔方程为:

$$i \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = \hat{H}_I |\psi_I(t)\rangle \quad (6)$$

利用初始条件(5)式, 解上述方程得到系统在任意时刻的态矢为:

$$\left. \begin{aligned} |\psi_I(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i \chi n^2 t} [A_n(t) |n, +\rangle + B_n(t) |n+1, -\rangle], \\ A_n(t) &= b_n e^{i n \beta} (\cos \Omega_n t + i \frac{\chi n + \Delta/2}{\Omega_n} \sin \Omega_n t) \quad B_n(t) = -i b_n e^{i n \beta} \frac{\lambda(n+1)^{1/2}}{\Omega_n} \sin \Omega_n t \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中, 失谐量  $\Delta$  和广义拉比(Rabi) 频率  $\Omega_n$  被定义为:

$$\Delta = \omega_c - \omega_a, \quad \Omega_n = [(\chi n + \Delta/2)^2 + \lambda^2(n+1)]^{1/2} \quad (8)$$

(7)式中  $|-\rangle$  为原子的基态. 很明显, 由(7)式确定的态矢在  $\chi=0$  时描述了标准 J-C 模型的动力学行为. 利用(7)式和 Pegg-Barnett 厄米位相公式可以对 K-J-C 模型场的位相特性进行研究.

### 3 场的位相概率分布

量子光场的位相问题主要表现在如何定义光场的厄米位相算符. Pegg-Barnett 的厄米位相公式是基于有限的  $S+1$  维希尔伯特(Hilbert)空间的一组正交完备位相态矢  $|\theta_m\rangle$  而定义的<sup>[1,2]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} |\theta_m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{S+1}} \sum_{n=0}^S e^{i n \theta_m} |n\rangle \\ \theta_m &= \theta_0 + \frac{2\pi m}{S+1} \quad m = 0, 1, 2, \dots, S \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中  $\theta_0$  为参考位相. Pegg 和 Barnett 假定: 所有位相变量的期待值均在  $S+1$  维希尔伯特空间进行, 然后允许  $S$  趋于无穷. 在该有限空间中, 厄米位相算符被定义为:

$$\hat{\phi}_\theta = \sum_{m=0}^S \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad \hat{\phi}_\theta = |\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle, \quad (10)$$

根据(10)式, 可以定义 K-J-C 模型场的位相概率分布为:

$$P(\theta_m, t) = |\langle \theta_m | \psi_I(t) \rangle|^2 \quad (11)$$

式中  $\langle \rangle_p$  是针对能量有限的实际物理态而言的. 本文选取  $\langle \rangle_{+a}$  表示初始时刻原子处于激发态  $|+\rangle$ , 模场处于相干态  $|\alpha\rangle$  时的求平均. 将(7)式和(9)式代入(11)式, 得到:

$$\begin{aligned}
 P_{+a}(\theta_m, t) &= \frac{1}{S+1} \left\{ \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(\chi n^2 + n\theta_m)} A_n(t) \right|^2 + \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(\chi n^2 + n\theta_m)} B_n(t) \right|^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{S+1} + \frac{2}{S+1} \left\{ \sum_{n>k} b_n b_k C_{n,k}(t) \cos[(n^2 - k^2)\chi t + (n - k)(\theta_m - \beta)] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n>k} b_n b_k D_{n,k}(t) \sin[(n^2 - k^2)\chi t + (n - k)(\theta_m - \beta)] \right\}, \\
 C_{n,k}(t) &= \cos\Omega_n t \cos\Omega_k t + [(\chi n + A/2)(\chi k + A/2) + \lambda^2(n+1)^{1/2}(k+1)^{1/2}] \frac{\sin\Omega_n t \sin\Omega_k t}{\Omega_n \Omega_k}, \\
 D_{n,k}(t) &= \frac{\chi n + A/2}{\Omega_n} \sin\Omega_n t \cos\Omega_k t - \frac{\chi k + A/2}{\Omega_k} \cos\Omega_n t \sin\Omega_k t,
 \end{aligned} \tag{12}$$

本文将参考位相  $\theta_0$  选择为:  $\theta_0 = \beta - \frac{\pi S}{S+1}$  (13)

(13)式代入(9)式得到:  $\theta_m = \beta + \frac{2\pi\mu}{S+1}$  (14)

式中  $\mu = m - S/2$  为  $-S/2$  到  $S/2$  整数步长的新位相标号. 由此处理, 场位相概率分布(12)式变得相对于  $\mu$  对称. 在  $S \rightarrow \infty$  的连续谱极限下,  $\theta_m$  为连续变量, 可用  $\theta$  代替  $\frac{2\pi\mu}{S+1}$ , 用  $d\theta$  代替  $\frac{2\pi}{S+1}$ . 这样, 连续位相概率分布为:

$$\begin{aligned}
 P_{+a}(\theta, t) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k C_{n,k}(t) \cos[(n^2 - k^2)\chi t + (n - k)\theta] \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{n>k} b_n b_k D_{n,k}(t) \sin[(n^2 - k^2)\chi t + (n - k)\theta] \right\}
 \end{aligned} \tag{15}$$

可以证明:  $P(\theta, t)$  在  $\theta$  从  $-\pi$  到  $\pi$  的对称区域内是归一化的:

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_{+a}(\theta, t) d\theta = 1 \tag{16}$$

(15)式反映了克尔介质与模场的非线性相互作用对场位相概率分布的影响. 当参数  $\chi/\lambda = 0$  时, 位相概率分布将回到标准 J-C 模型场的情况, 这与文献[5]的结论一致, 当  $\chi/\lambda \neq 0$  且  $(n^2 - k^2)(\chi/\lambda)\lambda t \neq 2m\pi, m = 0, 1, 2, 3, \dots$  时, 位相概率分布的峰值结构将在标准 J-C 模型场位相概率分布基础上发生分裂; 当  $\chi/\lambda \neq 0$ , 但  $(n^2 - k^2)(\chi/\lambda)\lambda t = 2m\pi$  时, 位相概率分布峰值结构将又回到标准 J-C 模型的情况, 但峰值的大小不同. 为看清这种峰值结构随  $\chi/\lambda$  变化的周期现象, 我们对(15)式作了数值计算, 结果如图 1 所示.

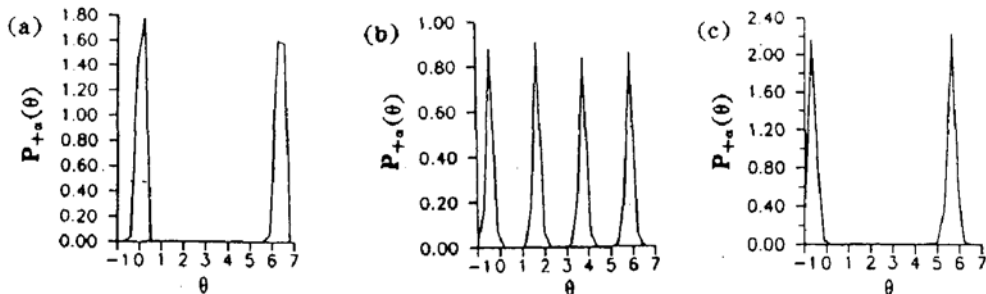


Fig. 1 The periodicity of peak value structure of phase probability distribution changes with  $\chi/\lambda$  for  $n = 20, \Delta = 5\lambda, \lambda t = 1.0$ , (a)  $\chi/\lambda = 0$ , (b)  $\chi/\lambda = 4\pi/3$ , (c)  $\chi/\lambda = 2\pi$

从图中可以看出: 当  $\chi/\lambda = 0$  时, 在位相为 0 到  $2\pi$  范围附近, 位相概率分布呈双峰结构,

这与文献[7]的结论一致,当  $\chi/\lambda = 4\pi/3$  时,位相概率分布呈四峰结构,发生了双分裂,当  $\chi/\lambda = 2\pi$  时,位相概率分布又回到双峰结构,但峰宽变窄,峰高增大.为更一般地说明位相概率分布与  $\chi/\lambda$  和  $\theta$  的关系,我们分别就相对时间  $\lambda t = 1.0$  和  $10.0$  作了  $P_{+a}(\theta, \chi/\lambda)$  的三维数值图解,如图 2 所示.从图中可以看到:相对时间  $\lambda t$  由  $1.0$ (图 2(a))演化到  $10.0$ (图 2(b))时,位相概率分布主峰旁出现了“旁瓣”,但峰值结构随  $\chi/\lambda$  变化的周期性仍然存在.

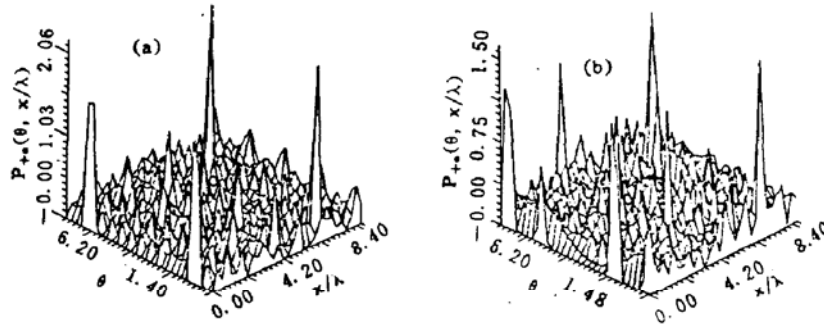


Fig. 2 Three dimensional numerical solution of phase probability distribution  $P(\theta, \chi/\lambda)$  for  $n_c = 20$ ,  $\Delta = 5\lambda$ , (a)  $\lambda t = 1.0$ , (b)  $\lambda t = 10.0$

#### 4 厄米位相算符的期待值及位相的涨落

利用上节场位相概率分布可以求出场厄米位相算符的期待值以及位相的涨落:

$$\langle \hat{\phi}_\theta \rangle_{+a} = \sum_m \theta_m P_{+a}(\theta_m, t) \quad (17)$$

$$\langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle_{+a} = \sum_m (\theta_m - \langle \hat{\phi}_\theta \rangle_{+a})^2 P_{+a}(\theta_m, t) \quad (18)$$

在  $S \rightarrow \infty$  的情况下,  $\theta_m$  为连续变量,我们用  $\theta$  代替  $(2\pi\mu)/(S+1)$ ,利用(15)式,在  $\theta$  的对称区域  $-\pi$  到  $\pi$  积分(17)、(18)式,得到:

$$\langle \hat{\phi}_\theta \rangle_{+a} = \beta - 2 \sum_{n>k} b_n b_k D_{n,k}(t) \frac{(-1)^{n-k}}{n-k} \cos[(n^2 - k^2)\chi t] \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle_{+a} = & \frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n>k} b_n b_k D_{n,k}(t) \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^2} \cos[(n^2 - k^2)\chi t] \\ & - 4 \left\{ \sum_{n>k} b_n b_k D_{n,k}(t) \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^2} \cos[(n^2 - k^2)\chi t] \right\}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

另外,我们还根据 Pegg-Barnett 位相么正算符期待值的定义:

$$\langle \exp(i \hat{\phi}_\theta) \rangle_{+a} = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n+1| \right\rangle_{+a} \quad (21)$$

求出了位相的正弦、余弦算符的期待值分别为:

$$\left. \begin{aligned} \langle \cos \hat{\phi}_\theta \rangle_{+a} = & \sum_n b_{n+1} b_n \{ \cos[(2n+1)\chi t - \beta] C_{n+1,n}(t) + \\ & + \sin[(2n+1)\chi t - \beta] D_{n+1,n}(t) \} \\ \langle \sin \hat{\phi}_\theta \rangle_{+a} = & \sum_n b_{n+1} b_n \{ \cos[(2n+1)\chi t - \beta] D_{n+1,n}(t) - \\ & - \sin[(2n+1)\chi t - \beta] C_{n+1,n}(t) \} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中,  $C_{n+1,n}(t)$ ,  $D_{n+1,n}(t)$ , 仍由(12)式决定.当  $\chi=0$  时,(19)、(20)、(22)式将回到标准 J-C 模型的情况.

对于位相算符期待值  $\langle \hat{\phi}_\theta \rangle_{+a}$  和位相涨落  $\langle \Delta \phi_\theta^2 \rangle_{+a}$ ,我们取  $\beta = 0$ ,  $n_c = 20$ ,  $\Delta = 5\lambda$ ,分别给

出了  $\chi/\lambda$  不同时的数值解,如图 3 和图 4 所示:

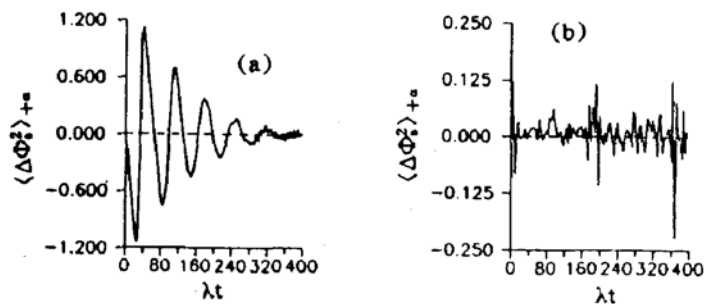


Fig. 3 The evolution of the expectation values of hermitian phase operator for  $\beta = 0$ ,  $n_c = 20$ ,  $\Delta = 5\lambda$ , (a)  $\chi/\lambda = 0$ , (b)  $\chi/\lambda = 2\pi$

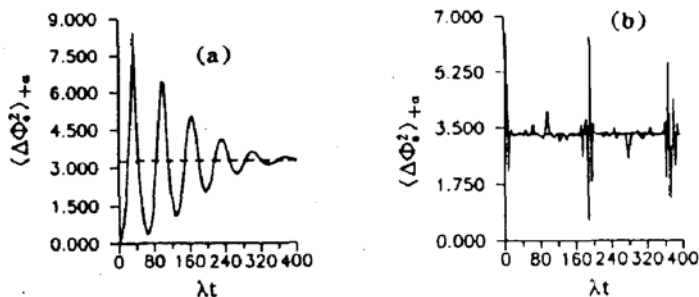


Fig. 4 The evolution of the phase fluctuations for  $\beta = 0$ ,  $n_c = 20$ ,  $\Delta = 5\lambda$ , (a)  $\chi/\lambda = 0$ , (b)  $\chi/\lambda = 2\pi$

从图 3 可看出:位相算符期待值  $\langle \hat{\phi} \rangle_{+a}$  围绕初始模场位相平均值  $\beta$  (这里已设定  $\beta$  为零) 振荡. 在  $\chi/\lambda = 0$  的标准 J-C 模型情况下(图 3(a)),  $\langle \hat{\phi} \rangle_{+a}$  振荡幅度范围在 1.2 ~ -1.2 之间,随着时间演化,振荡幅值逐渐减小,在  $\chi/\lambda \neq 0$  的 K-J-C 模型情况下(图 3(b)),由于克尔介质与模场的非线性相互作用,  $\langle \hat{\phi} \rangle_{+a}$  振荡幅值范围大为减小,在 0.125 ~ -0.25 之间,并出现了崩溃和回复现象.

图 4 是位相涨落  $\langle \Delta \phi^2 \rangle_{+a}$  的时间演化. 在  $\chi/\lambda = 0$  的标准 J-C 模型情况下(图 4(a)),  $\langle \Delta \phi^2 \rangle_{+a}$  围绕  $\pi^2/3$  振荡,振荡幅度随时间进程减小,没有崩溃和回复现象;在  $\chi/\lambda \neq 0$  的 K-J-C 模型情况下(图 4(b)),  $\langle \Delta \phi^2 \rangle_{+a}$  围绕  $\pi^2/3$  振荡,并出现了崩溃和回复现象. 原先标准 J-C 模型场的某些位相涨落峰值位置现对应于 K-J-C 模型场位相涨落的崩溃区域,峰值被“抹平”,此时克尔介质与模场的非线性相互作用导致位相涨落的压缩;而原先标准 J-C 模型场的某些位相涨落“低峪”区域现对应于 K-J-C 模型场位相涨落回复区域. 此时克尔介质与模场的非线性相互作用导致位相涨落的放大.

## 5 结 论

本文运用 Pegg-Barnett 厄米位相公式研究了 K-J-C 模型场的位相特性. 具体讨论了场的位相概率分布,厄米位相算符的期待值以及位相的涨落. 本文的结果表明:克尔介质与模场的

非线性相互作用可以导致场位相概率分布峰值结构发生周期性变化,厄米位相算符期待值和位相涨落出现崩溃和回复现象,通过与标准 J-C 模型场位相特性作比较可看出:在位相涨落的崩溃区域,可以导致位相涨落的压缩,而在位相涨落的回复区域,则可以导致位相涨落的放大.

### 参 考 文 献

- [1] D. T. Pegg, S. M. Barnett, Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**(4):1665~1675
- [2] S. M. Barnett, D. T. Pegg, On the Hermitian optical phase operator. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(1):7~19
- [3] T. Gantsog, R. Tanas, Phase properties of pair coherent states. *Opt. Commun.*, 1991, **82**(1/2):145~152
- [4] N. Grnbech-Jensen, P. L. Christiansen, Phase properties of squeezed states. *J. Opt. Soc. Am. (B)* 1989, **6**(12):2423~2429
- [5] Ho Trung Dung, R. Tanas., A. S. Shumovsky, Dynamical properties of the field phase in the Jaynes-Cummings model. *J. Mod. Opt.*, 1991, **38**(10):2069~2083
- [6] G. S. Agarwal, R. R. Puri, Collapse and revival phenomenon in the evolution of a resonant field in a Kerr-like medium. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**(6):2969~2997
- [7] 周 鹏, 与原子相互作用的量子光场的位相特性. 科学通报, 1992, **37**(12):1078~1082

## Phase properties of the field in the Jaynes-Cummings model with an additional Kerr medium

FANG Maofa

(Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081)

(Received 29 June 1992; revised 30 November 1992)

### Abstract

The phase properties of the field in the Jaynes-Cummings model with an additional Kerr medium are discussed from the point of view of the new phase formalism of Pegg and Barnett. The phase probability distribution, the expectation values and the fluctuations of the Hermitian phase operator and the phase fluctuations are obtained. The effect of nonlinearity interaction of Kerr medium on the phase properties are analysed in comparison with the standard Jaynes-Cummings.

**Key words** J-C model with additional Kerr medium, Hermitian phase formalism of Pegg and Barnett, the phase probability distribution.