第13卷 第2期
1993年2月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 13, No. 2
February, 1993

失谐量对双光子J-C模型中光场位相扩散及频率漂移的影响*

李高翔 彭金生**
(激光技术国家重点实验室，武汉 430074 华中师范大学物理系，武汉 430070)

提 要

通过考察失谐量对双光子 Jaynes-Cummings(J-C)模型中光场位相的影响，论证了失谐量不仅会影响原子-光场耦合程度，而且还会导致光场频率发生漂移.并且讨论了双光子 J-C 模型中光场位相特性与双光子激光频率特性之间的关系.

关键词 双光子 J-C 模型， 失谐量， 位相算符， 双光子激光.

1 引 言

最近，由单原子支持的双光子微波激射器已实现了运转[1]，特别是利用双光子激光可能获得压缩光[2,3]，这使得双光子 J-C 模型更加受到关注。以往的研究分别讨论了光场频率与原子本征频率间的失谐量对原子粒子布居差[4-6]、光场统计性质[7-9]及原子压缩效应[10]等问题的影响。这些结果表明，失谐量在光场与原子相互作用系统中是一个重要的物理量。另一方面，光场的位相具有十分重要的物理性质[11]，虽有人讨论了共振情况下单光子 J-C 模型中光场位相算符随时间的演化行为[12-13]，但对于双光子 J-C 模型中光场的位相性质尚未涉及。特别是还未曾有人探讨过在非共振情况下，失谐量对光场位相特征的影响。

本文利用 Barnett-Pegg 光场位相理论[14,15]，通过研究初始时处在相干态的单模光场与具有相同宇称的二能级原子相互作用系统中，光场位相算符随时间的演化规律，论证了光场频率与原子本征频率间的失谐不仅会影响原子与光场的耦合程度，而且还会导致光场频率发生漂移.并分析了原子的拉比(Rabi)振荡导致光场位相的漂移与双光子激光频率特性间的关系.

2 光场位相随时间的演化

描述具有相同宇称的二能级原子与单模光场通过双光子跃迁相互耦合的系统，在旋波近似下，其哈密顿算符(Hamiltoriam)可写为

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 s_z + \varepsilon(a^2 s_+ + a^{+2} s_-)\ , \qquad \hbar = 1 \tag{1}$$

式中算符 a^+ 和 a 表示频率为 ω 的光子的产生和消灭算符，s_z、s_t 为赝自旋算符，ε 为原子-光场耦

收稿日期：1991年11月14日；收到修改稿日期：1992年3月25日.

* 本文由国家自然科学基金和激光技术国家重点实验室开放基金资助.

** 中国高科技中心(世界实验室)

合常数，ω 为光场频率，ω_0 为原子的本征跃迁频率.

假设在 $t=0$ 时刻，原子处在激发态 $|a\rangle$，光场处于相干态 $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F_n |n\rangle \ , \qquad F_n = \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \ , \tag{2}$$

式中 $\alpha = \bar{n}^{1/2}\exp(i\zeta)$，$\bar{n}$ 为相干光场的平均光子数，ζ 为 α 的位相角，则初始时刻原子 - 光场耦合系统的态矢为

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n F_n |a,\ n\rangle \ . \tag{3}$$

随着时间的演化，在 t 时刻系统的态矢，由薛定锷(Schrödinger)方程得[9, 10]

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle = \sum_n \{ & a_n(t)\exp(i\Delta t/2)|a,\ n\rangle \\ & + b_{n+2}(t)\exp(-i\Delta t/2)|b,\ n+2\rangle \exp[-i(n+1)\omega t] \ ,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n(t) &= F_n e^{-i\Delta t/2}\left\{\frac{e^{i\nu(n)t}+e^{-i\nu(n)t}}{2}+\frac{\Delta}{4\nu(n)}[e^{i\nu(n)t}-e^{-i\nu(n)t}]\right\} \ , \\ b_{n+2}(t) &= -\frac{\sqrt{\varepsilon^2(n+1)(n+2)}}{2\nu(n)}F_n e^{i\Delta t/2}[e^{i\nu(n)t}-e^{-i\nu(n)t}] \ , \\ \nu(n) &= \sqrt{\varepsilon^2(n+1)(n+2)+\Delta^2/4} \ , \qquad \Delta = 2\omega-\omega_0 \ ,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中 $\nu(n)$ 是与原子拉比振荡频率有关的参量，Δ 为原子本征频率与双光子场频率 2ω 之差.

根据 Barnett-Pegg 的位相理论[14, 15]，定义完备和正交的光场位相本征态矢为

$$\left.\begin{aligned} |\theta_m\rangle &= (s+1)^{-1/2}\sum_{m=0}^{s}\exp(in\theta_m)|n\rangle \ , \\ \theta_m &= \theta_0 + [2\pi m/(s+1)] \ ,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中 θ_0 为一参考位相，$(s+1)$ 为位相本征态矢集张开的希尔伯特 (Hilbert) 空间的维数，Barnett 和 Pegg 认为[14, 15]，一旦在位相空间中算符的平均值计算完毕，s 将趋于 ∞，那么光场的厄米位相算符可定义为

$$\Phi = \sum_{m=0}^{s}\theta_m|\theta_m\rangle\langle\theta_m| \ . \tag{7}$$

显然，θ_m 为本征态矢 $|\theta_m\rangle$ 对应的本征值. 于是原子 - 光场耦合系统的态矢 $|\psi(t)\rangle$ 按光场位相本征态矢集展开为

$$\left.\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{m=0}^{s}\langle a,\ \theta_m|\psi(t)\rangle|a,\ \theta_m\rangle + |\langle b,\ \theta_m|\psi(t)\rangle|b,\ \theta_m\rangle \ , \\ p(\theta_m,\ t) &= |\langle a,\ \theta_m|\psi(t)\rangle|^2 + |\langle b,\ \theta_m|\psi(t)\rangle|^2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

代表了光场位相几率分布函数，因此在原子-光场耦合系统中，光场位相算符的平均值为

$$\langle\Phi^n\rangle = \sum_{m=0}^{s}\theta_m^n P(\theta_m,\ t) \qquad (n=1,\ 2) \tag{9}$$

如果我们考虑光场很强的情况，即 $\bar{n}\gg 1$，此时光场光子数的泊松(Poisson)分布可用高斯函数代替[13, 14]，即

$$F_n = (2\pi\bar{n})^{-1/4}\exp[-(n-\bar{n})/4\bar{n}]\exp(in\zeta) \ . \tag{10}$$

利用相干光场的光子数分布性质，可对 $\nu(n)$ 在 $n=\bar{n}$ 处展开只保留至 $(n-\bar{n})$ 的一次幂项，则光场位相几率分布函数为

$$\begin{aligned} P(\theta_m,\ t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{s+1}\right)\left(\frac{4\bar{n}}{2\pi}\right)^{1/2} & \left\{\left[1+\frac{\Delta}{2\nu(\bar{n})}\right]\exp\left[-\bar{n}\left(\zeta-\theta_m-\omega t+\frac{\varepsilon^2(\bar{n}+3/2)t}{\nu(\bar{n})}\right)^2\right]\right. \\ & \left.\left[1-\frac{\Delta}{2\nu(\bar{n})}\right]\exp\left[-2\bar{n}\left(\zeta-\theta_m-\omega t-\frac{\varepsilon^2(\bar{n}+3/2)t}{\nu(\bar{n})}\right)^2\right]\right\} \ .\end{aligned} \tag{11}$$

在连续谱极限下，即 $s\rightarrow\infty$ 时，θ_m 过渡为连续变量. 此时由于 $P(\theta,\ t)$ 为高斯型分布函数，所

以[14, 16]

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} P(\theta,\ t)\,\frac{s+1}{2\pi}d\theta \simeq \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta,\ t)\,\frac{s+1}{2\pi}d\theta = 1\,. \tag{12}$$

式中 $(s+1)/2\pi$ 为位相态密度.

利用(9)、(11)式,可求得光场位相随时间的演化规律

$$\langle \Phi\rangle = \int \theta P(\theta,\ t)\,\frac{s+1}{2\pi}d\theta = \zeta - \omega t + \frac{\Delta\varepsilon^2(\bar n + 3/2)t}{2\nu^2(\bar n)}\,, \tag{13}$$

$$\langle \Phi^2\rangle = \frac{1}{4\bar n} + (\zeta-\omega t)^2 + \frac{\Delta\varepsilon^2(\bar n + 3/2)t}{\nu^2(\bar n)}(\zeta-\omega t) + \left[\frac{\varepsilon^2(\bar n+3/2)t}{\nu(\bar n)}\right]^2. \tag{14}$$

光场位相涨落为

$$\langle \Delta\Phi\rangle^2 = \frac{1}{4\bar n} + \left[\frac{\varepsilon^2(\bar n+3/2)t}{\nu(\bar n)}\right]^2 - \left[\frac{\Delta\varepsilon^2(\bar n+3/2)t}{2\nu^2(\bar n)}\right]^2, \tag{15}$$

这样,我们可以利用(13)~(15)式来讨论失谐量对光场位相特性的影响.

3 讨 论

如果光场很强,即 $\bar n \gg 1$,可以认为光场光子数涨落不随时间演化[13],即 $\langle \Delta N\rangle^2 = \bar n$,这时光子数-位相测不准关系遵循

$$\langle \Delta N\rangle^2\langle \Delta\Phi\rangle^2 = \frac{1}{4} + \bar n\left[\frac{\varepsilon^2(\bar n+3/2)t}{\nu(\bar n)}\right]^2\left[1-\frac{\Delta^2}{4\nu^2(\bar n)}\right]. \tag{16}$$

从(16)式可以看出,由于原子的拉比振荡,导致光场的位相涨落增大,即光场位相发生时扩散,从而使得初始时刻的相干光场不再保持为光子数-位相最小测不准态[13, 17]. 由(15)式可见,光场位相涨落 $\langle \Delta\Phi\rangle^2$ 强烈依赖于失谐量 Δ. $|\Delta|$ 值越大,$\langle \Delta\varphi\rangle^2$ 越小,当

$$t = \frac{\pi\nu(\bar n)}{\sqrt{3}\,\varepsilon^2(\bar n+3/2)\,\sqrt{1-[\Delta/2\nu(\bar n)]^2}}\,, \tag{17}$$

时,光场位相涨落值达到 $\pi^2/3$,此时光场变为混沌光场[14, 15]. 显然,随着失谐量 $|\Delta|$ 的增大,光场由于原子拉比振荡从初始的相干光场变为混沌光场的时间愈长. 这说明 $|\Delta|$ 愈大,原子-光场的耦合愈弱[9]. 如果 $\omega^2 \gg \Delta^2 \gg \varepsilon^2(\bar n+2)(\bar n+1)$,($\Delta \ll \omega$ 为旋波近似所要求),由(16)式可知

$$\langle \Delta N\rangle^2\langle \Delta\Phi\rangle^2 = \frac{1}{4} + O\left(\frac{\varepsilon^2 t^2}{\Delta^2}\right)\,. \tag{18}$$

上式说明,当失谐量 $|\Delta|$ 较大时,光场在较长时间内保持为光子数-位相最小测不准态. 即在较长时间内保持为相干光场. 这是因为

$$\left.\begin{aligned} P_+(\theta,\ t) &= \int \frac{s+1}{2\pi}\,|\langle a,\theta_m|\psi(t)\rangle|^2 d\theta = 1 - O\left(\frac{\varepsilon^2 t^2}{\Delta^2}\right),\\ P_-(\theta,\ t) &= \int \frac{s+1}{2\pi}\,|\langle b,\theta_m|\psi(t)\rangle|^2 d\theta = O\left(\frac{\varepsilon^2 t^2}{\Delta^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

由(19)式可知,由于失谐量 $|\Delta|$ 较大,原子与光场耦合很弱,使得原子几乎不与光场耦合. 从而使得原子在较长时间内处于激发态,光场保持为相干光场. 这一结论与 Yoo 等人[18]关于单光子 J-C 模型的结论一致.

另外,利用(13)式得到

$$\frac{d}{dt}\langle \Phi\rangle = -\omega + \frac{\Delta\varepsilon^2(\bar n+3/2)}{2\nu^2(\bar n)} = -\Omega \neq -\omega \qquad 即 \qquad \delta = \omega - \Omega = \frac{\Delta\varepsilon^2(\bar n+3/2)}{2\nu^2(\bar n)}\,. \tag{20}$$

(20)式表征在原子-光场相互作用下,由于原子本征频率与光场频率的失谐,使得光场频率发

生了漂移. 如果 $\Delta < 0$,即 $2\omega < \omega_0$,则 $\delta < 0$,即光场频率增大,反之光场频率减小. 这意味着由于原子本征频率与双光子场频率 2ω 的不共振,导致光场频率向着与原子 本征频率满足双光子共振的方向漂移. 当失谐量 $\Delta = 0$ 时,光场频率漂移值 $\delta = 0$. 如果增大失谐量 $|\Delta|$,会导致光场频率漂移值 $|\delta|$ 呈非线性变化. 当 $|\Delta|$ 增大至 $|\Delta| = 2\varepsilon\sqrt{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)}$ 时,光场频率漂移值 $|\delta|$ 达到极大值 $|\delta|_{max} \simeq (\varepsilon/2)$. 继续增大 $|\Delta|$,$|\delta|$ 减小. 如果 $|\Delta| \gg \varepsilon^2(\bar{n}+3/2)$,则 $|\delta| \to 0$ 造成光场频率漂移值随着 $|\Delta|$ 的增大先增大后减小的原因是由于光场和原子间的非线性相互作用.

Boone 及 Swain 等人[3, 19]利用 Lamb-Scully 理论研究了等效双光子激光的频率特性,其频率牵引值为

$$\delta_L = \frac{\Delta_L A^e \bar{n}_e}{1 + \Delta_L^2 + \sigma_e^2 \bar{n}_e^2}\,, \tag{21}$$

式中 $\Delta_L = (\omega_0 - 2\omega)/\gamma$, $\sigma_e = 4\varepsilon^2/\gamma^2$, $A^e = 2R\varepsilon^2/\gamma^2$ 为 线性增益系数,γ 代表真空起伏使得原子从激发态衰变到基态的速率,R 为原子泵浦速率,$\bar{n}_e$ 为激光稳态平均光子数.

如果令(21) 式中 $\gamma = 0$, $R = 1$,则双光子激光的频率牵引值变为

$$\delta_L = (\omega_0 - 2\omega)\varepsilon^2\bar{n}_e/[(\Delta^2/4) + \varepsilon^2\bar{n}_e^2]\,, \tag{22}$$

当 $\bar{n} \gg 1$ 时,(20)式与(22)式完全一致. 导致这一结论的原因是由于双光子激光的 Lamb-Scully 理论[3, 19]把激光介质原子看作为 N 个全同的二能级原子,并且忽略掉原子间的合作效应[20]. 因而当 $\gamma = 0$, $R = 1$ 时,即在不考虑真空起伏的作用时,使一个处于激发态的原子与激光腔发生作用,这时双光子激光模型中的光场频率漂移值能够由双光子 J-C 模型来描述,从面可以发现,导致双光子激光频率发生牵引现象的重要原因之一是由于在原子与光场相互作用下,腔模频率与原子本征频率间的失谐造成的,光腔的损耗与频率牵引值无关.

总之,依照 Barnett-Pegg 位相理论,讨论了失谐量对双光子 J-C 模型中位相特性的影响,并分析了使得双光子激光发生频率牵引的原因.

参 考 文 献

[1] M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, Theory of the Rydberg-atom two-photon micromaser. *Phys. Rev* (*A*)., 1987, **35**(1):154～163

[2] M. O. Scully, K. Wodkiewicz, M. S. Zubairy *et al.*, Two-Photon correlated-spontaneous-emission laser: Quantum noise quenching and squeezing. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, **60**(18):1832～1835

[3] N. Lu, F. X. Zhao, S. Y. Zhu, Nonlinear theory of a two-photon correlated-spontaneous-emission laser: A coherently pumped two-level-two-photon laser. *Phys. Rev.* (*A*), 1989, **39**A(10):5189～5208

[4] X. S. Li, D. L. Lin, C. D. Gong, Nonresonant interaction of a three-level atom with cavity fields. I. General formalism and level occupation probabilities. *Phys. Rev.* (*A*), 1987, **36**A(11):5209～5219

[5] 彭金生,黄湘友, 双光子场作用下原子的周期衰变与回复效应. *光学学报*, 1988, **8**(8):为 756～758

[6] 范安辅,林多梁,陈小述, Jaynes-Cummings 模型的共振行为——原子能级占有几率和场 的相干特性. *光学学报*, 1991, **11**(1):21～29

[7] G. Compagno, J. S. Peng, F. Persico, Squeezing in a two-photon Dicke hamiltonian. *Opt. Commun.*, 1986, **57**(6):415～417

[8] S. Y. Zhu, Non-classical features in the three-level Jaynes-Cummings model. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(4):499～513

[9] V. Buzek, Light squeezing in the two-photon Jaynes-Cummings model: far-off-resonant limit. *Phys. Lett.* (*A*), **151**A(5):234～240

[10] 周鹏,彭金生,双光子 J-C 模型中原子的压缩行为. *物理学报*, 1989, **38**(12):2044～2048

[11] R. Loudon, *The quantum theory of light*. Oxford:Clarendon Press, 1973:140～147

[12] H. T. dung, R. Tanas, A. S. Shumovsky, Collapse, revivals and phase properties of the field in Jaynes-Cummings type model, *Opt. Commun.*, 1990, **79**(6):462～468

[13] H. X. Meng, C. L. Chai, Phase properties of coherent light in the Jaynes-Commings model. *Phys. Lett.* (*A*), 1991, **155A**(3):500～509

J. S. Peng, G. X. Li, Phase fluctuations in the Jaynes-Cummings model with and without rotation wave approximation. *Phys. Rev.* (*A*), 1992, **45**A(5):3289～3293

[14] S. M. Barnett, D. T. Pegg, On the Hermitian optical phase operator. *J. Mod. Opt.*, 1989, **36**(1)7～19

[15] D. T. Pegg, S. M. Barnett, Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field. *Phys. Rev.* (*A*), 1989, **39A**(4):1665～1675

[16] M. Orszag, C. Saavedra, Phase-difference fluctuations of the quantum-beat laser. *Phys. Rev.* (*A*), 1991, **43A**(5):2557～2560

[17] F. W. Cummings, Stimulated emission of radiation in a single mode. *Phys. Rev.*, 1965, **140**(4):1051～1058

[18] H. I. Yoo, J. H. Eberly, Dynamical theory of an atom with two or three levels interacting with quantized cavity fields. *Phys. Rep.*, 1985, **118**(5):232～337

[19] A. W. Boone, S. Swain, Theory of the degenerate two-photon laser. *Phys. Rev.* (*A*), 1990, **41A**(1):343～351

[20] S. Mahmood, K. Zaheer, M. S. Zubairy, Effectof cooperative atomic interaction on the natural linewidth of a single-mode laser. *Phys. Rev.* (*A*), 1988, **37**A(5):1634～1641

Influence of the frequency detuning on the phase diffusion and frequency shift of the light in the two-photon J-C model

LI Gaoxiang PENG Jinsheng

(*National Laboratary of Laser Technology*, *Wuhan*, 430074)

(*Department of Physics*, *Huazhong Normal University*, *Wuhan*, 430070)

(Received 14 November 1991; revised 25 March 1992)

Abstract

In this paper, we have studied the influence of the frequency detuning on the phase properties of the light field in the two-photon J-C model. We verify that the detuning can not only change the atom-field coupling degree, but also induce the frequency shift of light. And, the relation between the phase properties of phase operator in the two-photon J-C model and the frequency properties in the two-photon laser is discussed.

Key words the two-photon J-C model, the frequency detuning, phase operator, the two-photon laser.