

用非近似方法分析双光栅干涉仪

沈为民

(苏州大学激光研究室, 苏州 215006)

提 要

利用简单直观的非近似方法分析双光栅干涉仪,证明了该干涉仪的干涉条纹反差不受照明光源相干性限制时,光源的空间位置不影响条纹形状,仍是等间距直条纹.给出了消除光源相干性限制的一般条件,并讨论了条件失配对干涉仪的影响.

关键词 光栅干涉仪, 相干性, 干涉条纹.

1 引 言

由于光栅的正弦衍射规律,由它构成的干涉仪^[1]能在非相干光照明下产生大量高反差干涉条纹,并已用于非相干光全息术^[2,3]、光信息处理^[4,5]和制造低噪声全息光学元件^[6,7]、非对称槽光栅^[8~10]等领域.利用旁轴近似便于数学分析^[11],但考虑到光栅干涉仪的紧凑性,需使用槽密度较高的光栅,这时旁轴近似处理不再适用;最近,用高级近似^[12~14]给出了不受光源相干性限制的条件,另外,还用等效光源方法^[15]解释了该干涉仪能在相干非平面波照明下产生等间距直条纹图样.

本文利用基于角谱理论的非近似方法进行分析,简单直观,并能给出更为一般、丰富的结果.

2 一般分析

双光栅干涉仪的结构如图1所示,两块光栅 G_1 和 G_2 的槽密度分别是 f_1 和 f_2 , 它们互相平行,且栅线走向一致,其振幅透过率分别可写为

$$t_{G_1}(x_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(i2\pi n f_1 x_1), \quad (1)$$

$$t_{G_2}(x_2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m \exp(i2\pi m f_2 x_2), \quad (2)$$

$$a_n = A_n \exp[i\varphi_1(n)], \quad b_m = B_m \exp[i\varphi_2(m)], \quad (3)$$

式中 a_n 、 b_m 分别为傅里叶系数. 令光栅 G_1 到 G_2 、 G_2 到观察平面 P 的距离分别为 L_1 、 L_2 ; 入射角为 θ 、波长为 λ 的单位振幅平面波照射到光栅 G_1 上, 则, 由自由空间传递函数^[16]推得 (n, m) 级衍射光束在 P 平

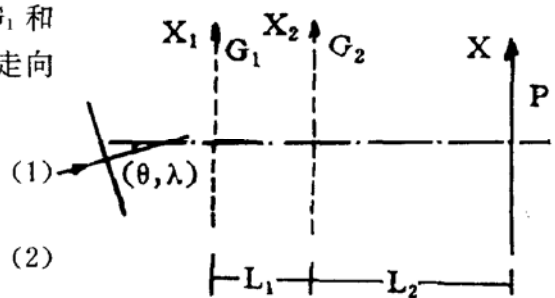


Fig. 1 The diagram of the two-grating interferometer

面上的振幅分布 $u_{p,n,m}(x)$ 为

$$\left. \begin{aligned} u_{p,n,m}(x) &= a_n b_m \exp\{i[2\pi(f_0 + n f_1 + m f_2)x + \varphi_1(n) + \varphi_2(n, m)]\}, \\ f_0 &= \sin\theta/\lambda, \quad \varphi_1(n) = 2\pi L_1[(1/\lambda^2) - (f_0 + n f_1)^2]^{1/2}, \\ \varphi_2(m) &= 2\pi L_2[(1/\lambda^2) - (f_0 + n f_1 + m f_2)^2]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

若在光栅 G_2 两侧插入挡光光栏, 只让 (n, m) 和 (n', m') 两束光会合于平面 P , 则该观察平面上的振幅分布 $u_p(x)$ 为

$$\begin{aligned} u_p(x) &= u_{p,n,m}(x) + u_{p,n',m'}(x) \\ &= \exp\{i[\pi[(n+n')f_1 + (m+m')f_2]x + \varphi_+\}] \exp\{i[2\pi f_0 x + \varphi_+ + (\theta, \lambda)]\} \\ &\quad \cdot \exp\left\{i \tan^{-1} \left[\frac{A_n B_m - A_{n'} B_{m'}}{A_n B_m + A_{n'} B_{m'}} \left[\tan \frac{2\pi(n f_1 + m f_2 - n' f_1 - m' f_2) + \Phi_- + \varphi_-(\theta, \lambda)}{2} \right] \right\} \right\} \\ &\quad \cdot \{A_n^2 B_m^2 + A_{n'}^2 B_{m'}^2 + 2A_n B_m A_{n'} B_{m'} \cdot \cos[2\pi(n f_1 + m f_2 - n' f_1 - m' f_2)x + \Phi_- + \varphi_-(\theta, \lambda)]\}^{1/2}, \end{aligned} \left. \begin{aligned} \Phi_+ &= \Phi_1(n) + \Phi_2(m) + \Phi_1(n') + \Phi_2(m'), \quad \varphi_+(\theta, \lambda) = \varphi_1(n) + \varphi_2(n, m) + \varphi_1(n') + \varphi_2(n', m'), \\ \Phi_- &= \Phi_1(n) + \Phi_2(m) - \Phi_1(n') - \Phi_2(m'), \quad \varphi_-(\theta, \lambda) = \varphi_1(n) + \varphi_2(n, m) - \varphi_1(n') - \varphi_2(n', m'). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

因而平面 P 内的光强分布为

$$I_p(x) = A_n^2 B_m^2 + A_{n'}^2 B_{m'}^2 + 2A_n B_m A_{n'} B_{m'} \cdot \cos[2\pi(n f_1 + m f_2 - n' f_1 - m' f_2)x + \Phi_- + \varphi_-(\theta, \lambda)], \quad (6)$$

(6)式表明, 入射平面波的波长和入射角不影响干涉条纹的间距, 但影响其横向位置, 因此, 照明光源的相干性越差, 干涉条纹的反差越低, 然而, 若适当选择两块光栅的槽密度和衍射光束, 使相位因子 $\varphi_-(\theta, \lambda)$ 也不受光源参数 θ, λ 的影响, 那么, 在无穷远处全非相干光源照明下, 能得到高反差条纹, 这时, 从(5)式可见即使用相干非平面波(如球面波)照明, 仍形成等间距直条纹, 从而可推断, 当相位因子 $\varphi_-(\theta, \lambda)$ 不随 θ, λ 变化时, 该干涉仪能产生数量和反差完全不受光源相干性和空间位置影响的等间距直条纹, 下面用简单直观的方法给出相位因子 $\varphi_-(\theta, \lambda)$ 不随光源参数 θ, λ 变化的条件.

3 消色差条件

(6)式表明, 条纹间距与波长 λ 无关, 即条纹间距是消色差的, 本节讨论相位因子 $\varphi_-(\theta, \lambda)$ 消色差的条件. $\varphi_-(\theta, \lambda)$ 可显式地写为

$$\begin{aligned} \varphi_-(\theta, \lambda) &= 2\pi L_1 \left[\frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{\sin\theta}{\lambda} + n f_1 \right)^2 \right]^{1/2} + 2\pi L_2 \left[\frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{\sin\theta}{\lambda} + n f_1 + m f_2 \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\quad - 2\pi L_1 \left[\frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{\sin\theta}{\lambda} + n' f_1 \right)^2 \right]^{1/2} + 2\pi L_2 \left[\frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{\sin\theta}{\lambda} + n' f_1 + m' f_2 \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

对于任意波长 λ , (7)式中的四个平方根均取无理数值, 因此, 仅当正负根号项两两互相抵消时, $\varphi_-(\theta, \lambda)$ 才不随波长 λ 变化, 形成完全消色差的干涉条纹. 由第一与第三项、第二与第四项相等, 得

$$m + m' = 0, \quad \frac{\sin\theta}{\lambda} + \frac{n + n'}{2} f_1 = 0, \quad (8)$$

或

$$n f_1 + m f_2 - n' f_1 - m' f_2 = 0, \quad \frac{\sin\theta}{\lambda} + \frac{n + n'}{2} f_1 = 0. \quad (9)$$

同样, 第一与第四项, 第二与第三项相等得

$$\left. \begin{aligned} (L_1^2 - L_2^2) \frac{\cos 2\theta}{\lambda^2} + 2[L_2^2(n' f_1 + m' f_2) - L_1^2 n f_1] \frac{\sin \theta}{\lambda} + L_2^2(n' f_1 + m' f_2)^2 - L_1^2 n^2 f_1^2 &= 0 \\ (L_1^2 - L_2^2) \frac{\cos 2\theta}{\lambda^2} + 2[L_2^2(n f_1 + m f_2) - L_1^2 n f_1] \frac{\sin \theta}{\lambda} + L_2^2(n f_1 + m f_2)^2 - L_1^2 n^2 f_1^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由于(8)式~(10)式须对任意波长 λ 成立,因此,由(8)式和(9)式得到消色差条件

$$\theta = 0, \quad n + n' = 0, \quad m + m' = 0, \quad (11)$$

或

$$\theta = 0, \quad n + n' = 0, \quad 2n f_1 + (m - m') f_2 = 0. \quad (12)$$

若不考虑消逝光束的干涉,即 $\cos \theta \neq 0$,则,由(10)式得消色差条件

$$L_1 = L_2, \quad m + m' = 0, \quad (n - n') f_1 + m f_2 = 0 \quad (13)$$

$$L_1 = L_2, \quad \theta = 0, \quad n' f_1 + m' f_2 = n f_1, \quad n f_1 + m f_2 = -n' f_1 \quad (14)$$

$$L_1 = L_2, \quad \theta = 0, \quad n f_1 + m f_2 = n' f_1, \quad n' f_1 + m' f_2 = -n f_1 \quad (15)$$

$$L_1 = L_2, \quad \theta = 0, \quad n f_1 + m f_2 = -n' f_1, \quad n' f_1 + m' f_2 = -n f_1 \quad (16)$$

对应于(11)式和(12)式的结构分别如图 2(a)和图 2(b),表明在正入射复色平面波照明下,它们分别在离光栅 G_2 有限和无限远处产生间距有限和无限大的消色差非定域条纹.(13)式与 θ 无关,表明满足此式时,能在任意复色光照明下产生定域消色差条纹,该定域平面和光栅 G_1 对称地位于光栅 G_2 的两侧,三种典型结构如图 3(a)~图 3(c)所示.对应于式(14)~(16)的结构如图 4(a)~图 4(c)所示,产生不能直接观察到的消色差定域虚条纹图样,定域面是光栅 G_1 所在的平面.

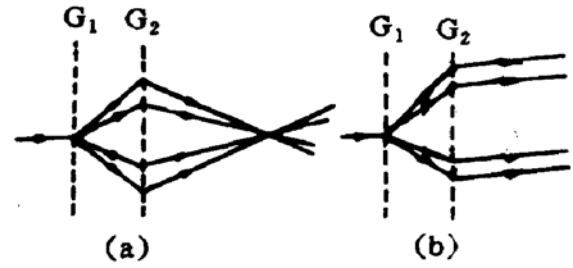


Fig. 2 The grating interferometers producing nonlocated achromatic fringe patterns with (a) finite (b) infinite spacing

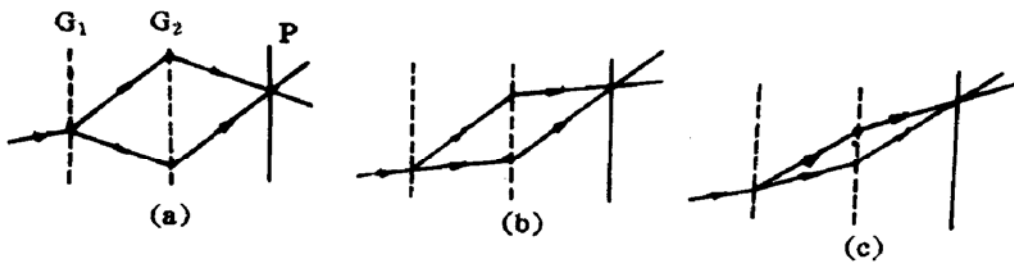


Fig. 3 The grating interferometer producing real located achromatic fringe patterns

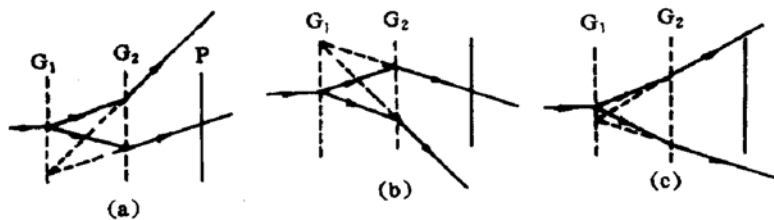


Fig. 4 The grating interferometer producing virtual located achromatic fringe patterns

4 消除空间相干限制的条件

类似地,相位因子 $\varphi_-(\theta, \lambda)$ [(7) 式] 中的四个平方根对于任意入射角 θ 均取无理数值,因此,不受光源空间相干性限制的条件是对于任意 θ 值,正负根号项两两抵消,同样,可得上节的 (8) ~ (10) 式. 显然,由于波长 λ 不可能无穷大, (8) 式和 (9) 式都无解. 然而,由 (10) 式可得

$$L_1 = L_2, \quad m + m' = 0, \quad (n - n')f_1 + mf_2 = 0 \quad (17)$$

(17) 式与 (13) 式相同,表明按 (17) 式的后面两个等式选择光栅的槽密度和衍射级时,能在单色或复色空间扩展光源照明下,产生定域条纹图样,定域面是唯一的,与光栅 G_1 对称地位于 G_2 的两侧. 根据第 2 节的分析可知,这时,照明光源离光栅 G_1 的距离不会影响上述非相干干涉条纹定域面内的条纹形状,即使用相干非平面波 (例如单色球面波) 照明,仍能获得等间距直条纹^[15].

5 讨 论

实验中,为了观察到完全不受光源相干性和空间位置影响的干涉条纹,须按照 (17) 式设置观察位置和选择光栅的槽密度与衍射级,要使光栅槽密度精确满足 (17) 式的第三个等式和记录平面严格与非相干条纹定域面重合,是十分困难的,本节讨论干涉仪失配的影响,即参数 L_2 和 f_2 近似满足 (17) 式

$$m + m' = 0, \quad L_2 = L_1 + \Delta L, \quad \Delta L \ll L_1, \\ f_2 = [(n' - n)/m]f_1 + \Delta f, \quad \Delta f \ll (n' - n)f_1/m$$

由 (17) 式得失配引起光束 (θ, λ) 产生的干涉图样的横向相位变化

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_-(\theta, \lambda) &= A\Delta L + B\Delta f, \\ A &= (2\pi/\lambda) \{ [1 - (\sin\theta + n'f_1\lambda)^2]^{1/2} - [1 - (\sin\theta + nf_1\lambda)^2]^{1/2} \}, \\ B &= -2\pi mL_1 \left\{ \frac{\sin\theta + n'f_1\lambda}{[1 - (\sin\theta + n'f_1\lambda)^2]^{1/2}} + \frac{\sin\theta + nf_1\lambda}{[1 - (\sin\theta + nf_1\lambda)^2]^{1/2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

不难得到,当光束参数 θ, λ 满足

$$\sin\theta/\lambda = -(n + n')f_1, \quad (19)$$

时,观察位置和光栅槽密度的失配 ΔL 和 Δf , 不影响干涉图样的横向位置. 实际上,第 3 节的分析已隐含地给出了这个结果 [(8) 式].

若均匀扩展光源的光谱带宽和空间线度不很大,那么,由于 $\Delta\varphi_-(\theta, \lambda)$ 随参数 θ, λ 连续变化,因此可推断,中心照明光束满足 (19) 式时,干涉仪的失配对干涉图样反差的影响最小,对光栅槽密度和记录位置的要求较松.

这时,令照明光源的辐射强度函数 $I_s(\theta, \lambda)$

$$I_s(\theta, \lambda) = 1, \quad |\theta - \theta_0| \leq (\Delta\theta/2) \ll 1, \quad |\lambda - \lambda_0| \leq (\Delta\lambda/2) \ll \lambda_0. \quad (20)$$

利用 (7) 式和 (19) 式,推得极端光束 $[\theta_0 + (\Delta\theta/2), \lambda_0 + (\Delta\lambda/2)]$ 和 $[\theta_0 - (\Delta\theta/2), \lambda_0 - (\Delta\lambda/2)]$ 产生的干涉图样间的横向相位差

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_-(\theta_0, \lambda_0) &= (A_1\Delta\theta + A_2\Delta\lambda)\Delta L + (B_1\Delta\theta + B_2\Delta\lambda)\Delta f, \\ A_1 &= (\pi\cos\theta_0/\lambda_0)\tan\theta_{0n}, \quad A_2 = -(\pi\sin\theta_0/\lambda_0)\tan\theta_{0n}, \\ B_1 &= -\pi L_1 m \lambda_0 \sin\theta_0 / \cos^3\theta_{0n}, \quad B_2 = \pi L_1 m \sin\theta_0 / \cos^3\theta_{0n} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中 θ_{0n} 为光束 (θ_0, λ_0) 被光栅 G_1 衍射的第 n 级衍射角. 可见,均匀扩展光源中心位于干涉仪前置准直透镜的焦点上时,光源的光谱扩展 $\Delta\lambda$ 和光栅槽密度失配 Δf 并不影响干涉图样的反差. 因此,光源中心位于轴上,选取对称衍射光束 $(n, m) = (-n', -m')$ 的光栅干涉仪具有最好的

消色差特性,干涉条纹的反差和定域深度仅受光源空间相干性影响。

类似于对经典干涉仪的讨论^[17],可利用(21)式讨论光源的许可扩展度和干涉仪参数的允许失配,限于篇幅,这里不再作赘述。

6 结 论

以上用准确方法给出了光栅干涉仪干涉图样的振幅和强度分布表达式,比高级近似^[12~14]和等效源法^[15]更为精确、直观地解释了光栅干涉仪能产生不受照明光源相干性和空间位置影响的等间距直条纹,进一步给出了更一般的结果,在复色平面波照明下,能形成定域或非定域消色差条纹。正向入射时,对称衍射光束产生间距有限的非定域干涉图样;非对称平行出射的衍射光束在无穷远处产生间距无穷大的非定域干涉图样,实际上,这对应于 Lau 效应情况^[18]。复色平面波斜入射或用空间扩展单色或复色光源照明时,只能产生定域条纹,定域面总是和第一块光栅 G_1 对称位于第二块光栅 G_2 的两侧,而两块光栅的槽密度和衍射级须满足匹配条件(18)式。

对失配情形讨论指出,照明光源位于轴上,对称衍射光束具有较好的消色差特性,受光栅槽密度失配的影响较小和能在最大的纵向范围内观察到干涉条纹,值得指出,本文第 5 节所作的近似[(18)式和(21)式]不同以前的处理^[11~14],仅假设失配和光源扩展很小,因此仍适用于高空间频率光栅构成的干涉仪。

参 考 文 献

- [1] F. J. Weinberg, N. B. Wood, Interferometer based on four diffraction gratings. *J. Sci. Instrum.*, 1959, **36**:227~230
- [2] E. N. Leith, B. J. Chang, Space invariant holography with quasi coherent light. *Appl. Opt.*, 1973, **12**(8):1957~1963
- [3] E. N. Leith, G. J. Swanson, Hologram formation with white light. *Proc. SPIE*, 1980, **215**:129~134
- [4] Y. S. Cheng, E. N. Leith, Successive fourier transformation with an achromatic interferometer. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(22):4029~4033
- [5] E. N. Leith, D. Angell, C. P. Kuei, Superresolution by incoherent-to-coherent conversion. *J. Opt. Soc. Am.*, 1987, **A4**(6):1050~1054
- [6] G. J. Swanson, Interferometric recording of high-quality zone plates in spatially incoherent illumination. *Opt. Lett.*, 1983, **8**(1):45~47
- [7] 沈为民,姜亚光,利用光栅干涉仪制作全息光学元件.中国光学学会 1985 年会论文摘要汇编,上海:1985:361
- [8] C. C. Iemmi, J. M. Simon, J. O. Ratto, Synthesis of asymmetric profiles from a double grating interferometer. *Appl. Opt.*, 1986, **25**(18):3171~3178
- [9] C. C. Iemmi, J. M. Simon, J. O. Ratto, Synthesis of asymmetric profiles from a double grating interferometer; an experimental demonstration. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(10):1822~1824
- [10] H. Chen, R. Hershey, E. N. Leith, Sawtooth profile fringes with a two-grating interferometer. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(6):1193~1198
- [11] B. J. Chang, R. C. Alferness, E. N. Leith, Space-invariant achromatic grating interferometers; theory. *Appl. Opt.*, 1975, **14**(7):1592~1600
- [12] G. J. Swanson, Broad-source fringes in grating and conventional interferometers. *J. Opt. Soc. Am.*, 1984, **A1**(12):1147~1153
- [13] Y. S. Cheng, Fringe formation in incoherent light with a two-grating interferometer. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(18):3057~3059
- [14] 沈为民,双光栅干涉仪.苏州大学学报(自然科学版),1992, **8**(1):66~69

- [15] S. C. Leon, E. N. Leith, Sources image distortion description of broad source fringe formation. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(6);1117~1121
- [16] J. W. Goodman, *Introduction to fourier optics*. New York, McGraw-Hill, Inc., 1968;48~54
- [17] M. Born, E. Wolf, *Principle of optics*. 6th edit., Oxford, pergamon press, 1980;256~316
- [18] G. J. Swanson, E. N. Leith, Lau effect and grating imaging. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(5);552~555

Nonapproximate analysis of two-grating interferometer

SHEN Weimin

(*Laser Research Section, Suzhou University, Suzhou 215006*)

(Received 23 December 1991; revised 20 April 1992)

Abstract

In this paper the two-grating interferometer is analyzed by means of nonapproximation. It is shown that when the number and the contrast of fringes from the interferometer are not limited by the coherence of its illuminating light, it is also not influenced by the position in space of the light source and is still capable of yielding equal spacing straight fringe pattern. The general conditions are derived under which the temporal or/and spatial coherence of illumination has no influence on the fringe patterns. Further, the effect on the interferometer due to the mismatch of these conditions is discussed.

Key words grating interferometer, coherence, fring pattern.