第 13 卷 第 12 期
1993 年 12 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 13, No. 12
December, 1993

真空态多光子 Jaynes-Cummings 模型中场的振幅 N 次方压缩

王继锁* 孙金祚* 王传奎*
(聊城师范学院光通信研究所,山东 252059)
杨富民
(烟台大学物理系,烟台 264005)

提　　要

本文研究了一初始处于原子相干态的二能级原子与真空态场相互耦合的 k 光子 Jaynes-Cummings (J-C)模型中场的振幅 N 次方压缩特性. 结果表明,场不仅存在振幅 $N=k$ 次方压缩,而且当 k 为偶数时,还存在振幅 $N=k/2$ 次方压缩.

关键词　多光子 J-C 模型，　真空态，　振幅 N 次方压缩.

1 引　　言

众所周知,J-C 模型[1]及推广的 J-C 模型中场可展示某些非经典特性,且场或原子的初始状态不同其非经典特征有很大差异[2~5]. 自从 1987 年 Rempe 等人[6]利用高 Q 微波腔中里德堡(Ryberg)原子与辐射场的相互作用在实验上获得 J-C 模型,并观测到原子反转的量子崩溃和回复现象以来,使得人们对 J-C 模型的理论研究不再仅具有理论上的意义. 最近,在研究真空态多光子 J-C 模型中场的振幅平方压缩时认为[7],只有真空态双光子和四光子 J-C 模型中场才展示振幅平方压缩效应. 本文讨论这种真空态多光子 J-C 模型中场的振幅 N 次方压缩特性.

2 振幅 N 次方压缩的定义

考虑频率为 ω 的单模辐射场,定义两个可测量,即两个厄米算符

$$Z_1(N)=(A^{+N}+A^N)/2,\qquad Z_2(N)=i(A^{+N}-A^N)/2,\tag{1}$$

它们分别表示光场复振幅 N 次幂的实部和虚部. 式中 $A=\exp(i\omega t)a$, $A^+=\exp(-i\omega t)a^+$ 为两个缓变算符. 容易证明,算符 Z_1 和 Z_2 满足对易关系和测不准关系

$$[Z_1(N),Z_2(N)]=i[A^N,A^{+N}]/2\tag{2}$$

$$\Delta Z_1^2\,\Delta Z_2^2\geqslant\frac{1}{16}|\langle[A^N,A^{+N}]\rangle|^2\tag{3}$$

收稿日期:1992 年 12 月 30 日;收到修改稿日期:1993 年 5 月 24 日

中国高等科学技术中心(世界实验室),北京 8730 邮政信箱,100080

如果
$$\langle \Delta Z_i^2 \rangle < 1/4\langle [A^N, A^{+N}] \rangle, \ (i = 1,2) \tag{4}$$
成立，则称光场存在振幅 N 次方压缩；或者由(4)式，若存在
$$q_i = \langle \Delta Z_i^2 \rangle - (1/4)\langle [A^N, A^{+N}] \rangle < 0, \ (i = 1,2), \tag{5}$$
则表示光场在 Z_i 分量上存在振幅 N 次方压缩效应. q_i 值反映了其压缩深度.

可以证明，在(4)式意义下的光场是非经典的[8]. 然而(4)式不同于 Hong 和 Mandel[9] 所定义的高阶压缩，而是光场的又一新的非经典效应[10].

3　真空态 k 光子 J-C 模型中场的振幅 N 次方压缩特性

对于二能级 k 光子 J-C 模型[7]，若初始时刻场处于真空态，而原子处于原子相干态
$$|\eta\rangle = \cos(\theta/2)|-\rangle - \exp(i\phi)\sin(\theta/2)|+\rangle, \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi), \tag{6}$$
则在共振条件下体系演化到 $t > 0$ 时刻的状态为[5,7]
$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle = {} & \exp(ik\omega t/2)\cos(\theta/2)|-,0\rangle + i\exp[-i(k\omega t/2 - \phi)]\sin(\theta/2) \\ & \cdot \sin(\varepsilon t\sqrt{k!})|-,k\rangle - \exp[-i(k\omega t/2 - \phi)]\sin(\theta/2)\cos(\varepsilon t\sqrt{k!})|+,0\rangle,\end{aligned} \tag{7}$$
式中各量的意义同文献[7]. 不难求得，在(7)式下有关算符的态平均值为：
$$\left.\begin{aligned}\langle A^N \rangle &= i\frac{1}{2}\sqrt{k!}\exp(i\phi)\sin\theta\sin(\varepsilon t\sqrt{k!})\delta_{N,k}, \\ \langle A^{2N} \rangle &= i\frac{1}{2}\sqrt{k!}\exp(i\phi)\sin\theta\sin(\varepsilon t\sqrt{k!})\delta_{2N,k} \\ \langle A^{+N} \rangle &= -i\frac{1}{2}\sqrt{k!}\exp(-i\phi)\sin\theta\sin(\varepsilon t\sqrt{k!})\delta_{N,k} \\ \langle A^{+2N} \rangle &= -i\frac{1}{2}\sqrt{k!}\exp(-i\phi)\sin\theta\sin(\varepsilon t\sqrt{k!})\delta_{2N,k} \\ \langle A^{+N}A^N \rangle &= \frac{k!}{(k-N)!}\sin^2(\theta/2)\sin^2(\varepsilon t\sqrt{k!})\end{aligned}\right\} \tag{8}$$
把(1)式代入(5)式得
$$\left.\begin{aligned}q_1 &= \frac{1}{4}[2\langle A^{+N}A^N \rangle + \langle A^{+2N} + A^{2N} \rangle - \langle A^{+N} + A^N \rangle^2] \\ q_2 &= \frac{1}{4}[2\langle A^{+N}A^N \rangle - \langle A^{+2N} + A^{2N} \rangle + \langle A^{+N} - A^N \rangle^2]\end{aligned}\right\} \tag{9}$$
将(8)式分别代入(9)式发现，只有当 $N = k$ 和当 k 为偶数且 $N = k/2$ 时光场才存在振幅 N 次方压缩，在其它情况下光场不存在这种压缩效应.

3.1　当 $N = k$ 时

这时将(8)式分别代入(9)式得
$$\left.\begin{aligned}q_1 &= \frac{1}{2}k!\sin^2(\theta/2)\sin^2(\varepsilon t\sqrt{k!})[1 - 2\sin^2\phi\cos^2(\theta/2)], \\ q_2 &= \frac{1}{2}k!\sin^2(\theta/2)\sin^2(\varepsilon t\sqrt{k!})[1 - 2\cos^2\phi\cos^2(\theta/2)].\end{aligned}\right\} \tag{10}$$
由(10)式可知，通过适当选取 θ 和 ϕ 值，总可在 Z_1 或 Z_2 方向上使光场一直处于振幅 $N = k$ 次方压缩状态[$t_0 = (m\pi)/(\varepsilon\sqrt{k!})$ $(m = 0,1,2,\cdots)$ 除外]. 容易得到压缩程度以拉比(Rabi)频率 $2\varepsilon\sqrt{k!}$ 振荡，最佳压缩时间为 $t_b = (m + 1/2)\pi/(\varepsilon\sqrt{k!})$，$(m = 0,1,2,\cdots)$. 例如考虑 Z_1 方向，只要选取 θ 和 ϕ 使之满足 $\sin^2\phi\cos^2(\theta/2) > 1/2$，则除 $t_0 = m\pi/(\varepsilon\sqrt{k!})$ $(m = 0,1,2\cdots)$ 外，在

整个时间演化过程中 Z_1 分量将一直处于振幅 $N = k$ 次方压缩状态. 且由(10)式容易证明,当 $\theta = \pi/3$, $\phi = \pi/2$ 和 $t = t_b = (m + 1/2)\pi/(\varepsilon\sqrt{k!})$ $(m = 0,1,2,\cdots)$ 时,压缩最深.

3.2 当 k 为偶数且 $N = k/2$ 时

在此情况下将(8)式分别代入(9)式得

$$q_j = \frac{1}{2}k!/(k/2)!\sin^2(\theta/2)\sin^2(\varepsilon t\sqrt{k!}) \pm \frac{1}{4}\sqrt{k!}\sin\phi\sin\theta\sin(\varepsilon t\sqrt{k!}), \tag{11}$$

式中 $j = 1,2$;且当 $j = 1$ 时,等号右端取"$-$"号,$j = 2$ 时取"$+$"号. 由此可见,只要适当选取 θ 和 ϕ 值,这时光场在 Z_1 或 Z_2 方向上可呈现振幅 $N = k/2$ 次方压缩. 例如考虑 Z_1 方向,若选取 ϕ 为 $0 < \phi < \pi$,当 $0 < \sin(\varepsilon t\sqrt{k!}) < (k/2)!/\sqrt{k!}\sin\phi\,\mathrm{ctg}\,(\theta/2)$ 时,光场在此方向上便可呈现振幅 $N = k/2$ 次方压缩,其压缩时间取决于 θ 和 ϕ 值. 如取 $\phi = \pi/2$,则当 $\theta < \theta_0 = 2\,\mathrm{arc\,ctg}\,[\sqrt{k!}/(k/2)!]$ 时,压缩的时间范围为 $2m\pi/(\varepsilon\sqrt{k!}) < t < (2m + 1)\pi/(\varepsilon\sqrt{k!})$ $(m = 0,1,2,\cdots)$;而当 $\theta \geqslant \theta_0$ 时,压缩的时间范围为 $2m\pi < \varepsilon t\sqrt{k!} < 2m\pi + \mathrm{arc\,sin}\,[(k/2)!\,\mathrm{ctg}\,(\theta/2)/\sqrt{k!}]$ 和 $(2m + 1)\pi - \mathrm{arc\,sin}\,[(k/2)!\,\mathrm{ctg}\,(\theta/2)/\sqrt{k!}] < \varepsilon t\sqrt{k!} < (2m + 1)\pi$ $(m = 0,1,2,\cdots)$. 同样,在 Z_2 方向上可作类似的讨论,这里不再赘述.

3.3 当 $N \neq k$ 和当 k 为偶数且 $N \neq k/2$ 时

这时将(8)式分别代入(9)式得

$$q_1 = q_2 = \frac{1}{2}k!/((k - N)!\sin^2(\theta/2)\sin^2(\varepsilon t\sqrt{k!}) \geqslant 0, \tag{12}$$

这表明此时在 Z_1 和 Z_2 方向上场不存在振幅 N 次方压缩效应.

另外需要特别说明的是,依据(4)式可定义压缩度

$$D_i = \frac{4\langle\Delta Z_i^2\rangle - \langle[A^N, A^{+N}]\rangle}{\langle[A^N, A^{+N}]\rangle}, \qquad (i = 1,2) \tag{13}$$

式中 $-1 \leqslant D_i < 0$ 表示光场在 Z_i 分量上存在振幅 N 次方压缩效应,D_i 的大小反映其被压缩的程度. 由此,对于本文所讨论的系统,可研究其压缩程度,而由上面的讨论将不难得到,其压缩程度将依赖于 θ、ϕ、εt 和 k(或 N) 的取值,因此这将涉及到 k(或 N) 的具体取值,这只有当 k(或 N) 给定后才可以进行定量的讨论.

4 结 论

本文研究了真空态 k 光子 J-C 模型中场的振幅 N 次方压缩特性,结果表明,在真空态 J-C 模型中,场不但可呈现振幅 $N = k$ 次方压缩效应,而且当 k 不偶数时,场还可呈现振幅 $N = k/2$ 次方压缩效应. 文献[7]中所研究的在这种 J-C 模型中场的振幅平方压缩效应,只不过是本文所得普遍性结论的一个特例,即 $N = 2$ 时的特殊情况.

参 考 文 献

[1] E. T. Jaynes, F. E. Cummings, Comparision of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, 1963, **51**(1): 89～109

[2] M. Millery, Bounds on sub-Possonian field statistics in the Jaynes-Cumming model. *Phys. Rev.* (*A*), 1987, **A35**(10): 4186～4191

[3] A. S. Shumovsky, F. L. Kien, E. I. Aliskenderov, Squeezing in the multiphoton Jaynes-Cummings model. *Phys. Lett.* (*A*), 1987, **A124**(6/7): 351～354

[4] S. Y. Zhu, M. O. Scully, Evolution of squeezed states in the Jaynes-Cummings model. *Phys. Lett.* (*A*), 1988,

A**130**(2) : 101～103

[5] 周 鹏，彭金生， 多光子 Jaynes-Cummings 模型的演化. 光学学报，1990，**10**(9) : 837～844

[6] G. Rempe, H. Walther, N. Klein, Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(4) : 353～356

[7] 周 鹏， 真空态多光子 Jaynes-Cummings 模型中场的非经典性. 光学学报，1992，**12**(7) : 583～587

[8] S. D. Du, C. D. Gong, Squeezing of the k th power of the field amplitude. *Phys. Lett.* (*A*), 1992, A**168**(4) : 296～300

[9] C. K. Hong, L. Mandel, Generation of higher-order squeezing of quantum electromagnetic field. *Phys. Rev.* (*A*), 1985, A**32**(2) : 974～982

[10] 王继锁，孙金祚，王传奎， 光场高阶压缩的独立性. 量子电子学，1992，**9**(增刊) : 9～10

The N th-power squeezing of field amplitude in the vacuum state multiphoton Jaynes-Cummings model

WANG Jisuo　　SUN Jinzuo　　WANG Chuankui

(*Institute of Optical Communication, Liaocheng Teachers' College, Shandong* 252059)

YANG Fumin

(*Department of Physics, Yantai University, Yantai* 264005)

(Received 30 December 1992; revised 24 May 1993)

Abstract

The properties of the N th-power squeezing of field amplitude in the k-photon Jaynes-Cummings model of an atom initially in atomic coherent state coupling with vacuum field are investigated in this paper. The results show that the field exhibit not only the $N = k$ th-power squeezing of the amplitude but also the $N = (k/2)$ th-power squeezing when k is even.

Key words　multiphoton Jaynes-Cummings model,　vacuum state,　amplitude N th-power squeezing.