

对数态 Tavis-Cummings 模型中辐射场的非经典性*

宋同强¹⁾ 冯 健²⁾ 王文正¹⁾

(1) 聊城师范学院光通信研究所, 252059
(2) 聊城师范学院物理系, 252059

提 要

本文研究了任意初态的双光子 Tavis-Cummings 模型的演化规律, 作为例子, 讨论了初始时刻两个原子均处于基态而光场为对数态时场的压缩效应, 光子的聚束和反聚束效应.

关键词 Tavis-Cummings 模型, 压缩, 聚束和反聚束效应.

1 引 言

与理论上和实验上都很有意义的 Jaynes-Cummings 模型一样, 描述两个全同二能级原子与光场相互作用的 Tavis-Cummings 模型^[1](以下简称 TC 模型)也是目前量子光学中一个引人注目的课题. 人们相继研究了单光子 TC 模型和双光子 TC 模型中场的统计性质^[2,3], 双光子 TC 模型中原子的压缩效应和双原子协变呈现的崩溃与回复现象^[4]. 由于对数态不但具有经典场的性质, 而且具有非经典场的性质, 近年来人们对由对数态描述的光场发生了兴趣^[5]. 本文将研究双光子 TC 模型与对数态光场相互作用过程中场的压缩效应, 光子的聚束和反聚束效应.

2 双光子 TC 模型的一般理论

两个全同二能级原子与双光子场作用的哈密顿量在旋波近似下可以写为(共振情况)

$$H = H_0 + H_I \quad (1)$$

$$H_0 = \omega(a^+a + 2S_3), \quad H_I = g(a^2S_+ + a^{+2}S_-) \quad (\hbar = 1) \quad (2)$$

式中 ω 为辐射场的频率, S_3, S_+ 和 S_- 分别为双原子的自旋算符, a 和 a^+ 分别为场的湮灭算符和产生算符, g 为场和原子的耦合常数. 容易验证下列对易关系:

$$[H, H_0] = [H, H_I] = [H_0, H_I] = 0 \quad (3)$$

定义相互作用表象中的演化算符 $U(t)$

$$|\psi_I(t)\rangle = U(t)|\psi_I(0)\rangle \quad (4)$$

考虑到(3)式得 $U(t)$ 满足的方程为

收稿日期: 1992 年 12 月 21 日; 收到修改稿日期: 1993 年 6 月 15 日

* 山东省自然科学基金资助

$$i \dot{U}(t) = H_t U(t) \quad (5)$$

设系统初始态密度算符为

$$\rho_T(0) = \rho^a \otimes \rho(0) \quad (6)$$

式中 ρ^a 为原子初始态密度算符, $\rho(0)$ 为光场初始态密度算符. 在相互作用表象中, 系统任意时刻的态密度算符为

$$\rho_T(t) = U(t) \rho_T(0) U^\dagger(t) \quad (7)$$

将(7)式先对原子求迹, 然后求其在光子数态表象中的矩阵元

$$\rho_{m,n}(t) = \sum_{ia=1}^3 \langle m | \langle ia | U \rho^a \rho(0) U^\dagger | ia \rangle | n \rangle \quad (8)$$

式中 $|n\rangle$ 为光子数态, $|ia\rangle$ 为原子态, $ia=1$ 为两个原子都处于基态, $ia=2$ 表示一个原子处于基态而另一个原子处于激发态, $ia=3$ 表示两个原子均处于激发态. 利用完备性, 在(8)式右边插入

$$\sum_{j_a=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} |j_a\rangle |k\rangle \langle k| \langle j_a| = 1, \quad \sum_{ia=1}^3 \sum_{l=0}^{\infty} |\lambda a\rangle |l\rangle \langle l| \langle \lambda a| = 1$$

则得

$$\rho_{m,n}(t) = \sum_{ia=1}^3 \sum_{ja=1}^3 \sum_{ka=1}^3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} U_{m,ia_1k,ja} U_{l,\lambda a_1n,ia}^{\dagger} \rho_{k,l}(0) \quad (9)$$

由(5)式得演化矩阵元 $U_{m,ia_1n,ja}$ 的运动方程

$$\begin{aligned} i \dot{U}_{m,ia_1n,1} &= \sqrt{2g} \sqrt{n(n-1)} U_{m,ia_1n-2,2} \\ i \dot{U}_{m,ia_1n,2} &= \sqrt{2g} \sqrt{n(n-1)} U_{m,ia_1n-2,3} + \sqrt{2g} \sqrt{(n+1)(n+2)} U_{m,ia_1n+2,1} \\ i \dot{U}_{m,ia_1n,3} &= \sqrt{2g} \sqrt{(n+1)(n+2)} U_{m,ia_1n+2,2} \quad (ia=1,2,3) \end{aligned} \quad (10)$$

利用初始条件 $U(0) = 1$, 经过一系列的运算得

$$A_m = U_{m,1,m,1}(t) = \frac{2g^2}{\beta_{m-2}} [(m-2)(m-3) + m(m-1) \cos \sqrt{\beta_{m-2}} t] \quad (11)$$

$$B_m = U_{m,1,m-2,2}(t) = -i \sqrt{2g} \sqrt{\frac{m(m-1)}{\beta_{m-2}}} \sin \sqrt{\beta_{m-2}} t \quad (12)$$

$$C_m = U_{m,1,m-4,3}(t) = \frac{2g^2}{\beta_{m-2}} \sqrt{\frac{m!}{(m-4)!}} (\cos \sqrt{\beta_{m-2}} t - 1) \quad (13)$$

$$D_m = U_{m,2,m+2,1}(t) = -i \sqrt{2g} \sqrt{\frac{(m+1)(m+2)}{\beta_m}} \sin \sqrt{\beta_m} t \quad (14)$$

$$E_m = U_{m,2,m,2}(t) = \cos \sqrt{\beta_m} t \quad (15)$$

$$F_m = U_{m,2,m-2,3}(t) = -i \sqrt{2g} \sqrt{\frac{m(m-1)}{\beta_m}} \sin \sqrt{\beta_m} t \quad (16)$$

$$G_m = U_{m,3,m+4,1}(t) = \frac{2g^2}{\beta_{m+2}} \sqrt{\frac{(m+4)!}{m!}} (\cos \sqrt{\beta_{m+2}} t - 1) \quad (17)$$

$$H_m = U_{m,3,m+2,2}(t) = -i \sqrt{2g} \sqrt{\frac{(m+1)(m+2)}{\beta_{m+2}}} \sin \sqrt{\beta_{m+2}} t \quad (18)$$

$$I_m = U_{m,3,m,3}(t) = \frac{2g^2}{\beta_{m+2}} [(m+3)(m+4) + (m+1)(m+2) \cos \sqrt{\beta_{m+2}} t] \quad (19)$$

其中

$$\beta_m = 4g^2(m^2 + m + 1) \quad (20)$$

其它的演化矩阵元均为零. 把上面的演化矩阵元的表达式代入(9)式即可得到任意初始光场和任意初始原子状态下的光场密度矩阵元 $\rho_{m,n}(t)$.

$$\begin{aligned} \rho_{m,n}(t) = & \rho_{1,1}^a(A_m\rho_{m,n}(0)A_n^* + D_m\rho_{m+2,n+2}(0)D_n^* + G_m\rho_{m+4,n+4}(0)G_n^*) \\ & + \rho_{1,2}^a(A_m\rho_{m,n-2}(0)B_n^* + D_m\rho_{m+2,n}(0)E_n^* + G_m\rho_{m+4,n+2}(0)H_n^*) \\ & + \rho_{1,3}^a(A_m\rho_{m,n-4}(0)C_n^* + D_m\rho_{m+2,n-2}(0)F_n^* + G_m\rho_{m+4,n}(0)I_n^*) \\ & + \rho_{2,1}^a(B_m\rho_{m-2,n}(0)A_n^* + E_m\rho_{m,n+2}(0)D_n^* + H_m\rho_{m+2,n+4}(0)G_n^*) \\ & + \rho_{2,2}^a(B_m\rho_{m-2,n-2}(0)B_n^* + E_m\rho_{m,n}(0)E_n^* + H_m\rho_{m+2,n+2}(0)H_n^*) \\ & + \rho_{2,3}^a(B_m\rho_{m-2,n-4}(0)C_n^* + E_m\rho_{m,n-2}(0)F_n^* + H_m\rho_{m+2,n}(0)I_n^*) \\ & + \rho_{3,1}^a(C_m\rho_{m-4,n}(0)A_n^* + F_m\rho_{m-2,n+2}(0)D_n^* + I_m\rho_{m,n+4}(0)G_n^*) \\ & + \rho_{3,2}^a(C_m\rho_{m-4,n-2}(0)B_n^* + F_m\rho_{m-2,n}(0)E_n^* + I_m\rho_{m,n+2}(0)H_n^*) \\ & + \rho_{3,3}^a(C_m\rho_{m-4,n-4}(0)C_n^* + F_m\rho_{m-2,n-2}(0)F_n^* + I_m\rho_{m,n}(0)I_n^*) \end{aligned} \quad (21)$$

3 光场的压缩效应

定义光场的两个缓变的正交的厄米算符

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + a^+), \quad a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+) \quad (22)$$

若存在 $\langle(\Delta a_i)^2\rangle < 1/4$, ($i = 1, 2$) 即

$$S_i = 4\langle(\Delta a_i)^2\rangle - 1 < 0 \quad (23)$$

就说光场的 a_i ($i = 1, 2$) 分量被压缩. (23)式可用光场密度矩阵元表示为

$$\begin{aligned} S_1 = & 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{(m+2)!/m!} \operatorname{Re} \rho_{m,m+2}(t) + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \rho_{m+1,m+1}(t) \\ & - [2 \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m+1} \operatorname{Re} \rho_{m,m+1}(t)]^2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} S_2 = & -2 \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{(m+2)!}{m!}} \operatorname{Re} \rho_{m,m+2}(t) + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \rho_{m+1,m+1}(t) \\ & - [2 \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m+1} \operatorname{Im} \rho_{m,m+1}(t)]^2 \end{aligned} \quad (25)$$

假定初始时刻两个原子均处于基态, 即

$$\rho_{1,1}^a = 1, \quad \rho_{ia,ja}^a = 0, \quad (ia \neq 1, ja \neq 1) \quad (26)$$

而光场由对数态 $|q, C\rangle$ 描述

$$|q, C\rangle = C|0\rangle + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} |n\rangle \quad (27)$$

式中 q 和 C 为复数, $|C| \leq 1$, $|q| < 1$, 由归一化条件得

$$\beta^2 = \frac{|C|^2 - 1}{\ln(1 - |q|^2)} \quad (28)$$

光场初态密度矩阵元为

$$\rho_{m,n}(0) = \langle m|q, C\rangle \langle q, C|n\rangle \quad (29)$$

把(26)式代入(21)式得

$$\rho_{m,s}(t) = A_m \rho_{m,s}(0) A_m^* + D_m \rho_{m+2,s+2}(0) D_m^* + G_m \rho_{m+4,s+4}(0) G_m^* \quad (30)$$

由(23)、(24)、(25)和(30)式便可以对光场的压缩效应进行有效地分析.

图 1 是通过数值计算得到的 S_1 的演化规律, 其中 q 和 C 的幅角均取为零, 虚线对应于 $S_1 = 0$. 可以看出: 压缩的幅度并不随 $|q|$ 和 $|C|$ 的不同单调地变化, 最佳压缩出现在 $|q| = 0.8$, $|C| = 0.7$ 附近, 其压缩程度约为 55%, 这说明对数态双光子 TC 模型能很好地抑制辐射场的噪音. 当 $|C| \leq 0.28$ 时, 无论 $|q|$ 取何值, 光场的 a_1 分量都不会呈现压缩. (如图 1(d) 所示); $|C|$ 较大时, 光场的 a_1 分量呈现压缩的持续时间较长, 出现压缩的次数较多(如图 1(b) 和 (e) 所示).

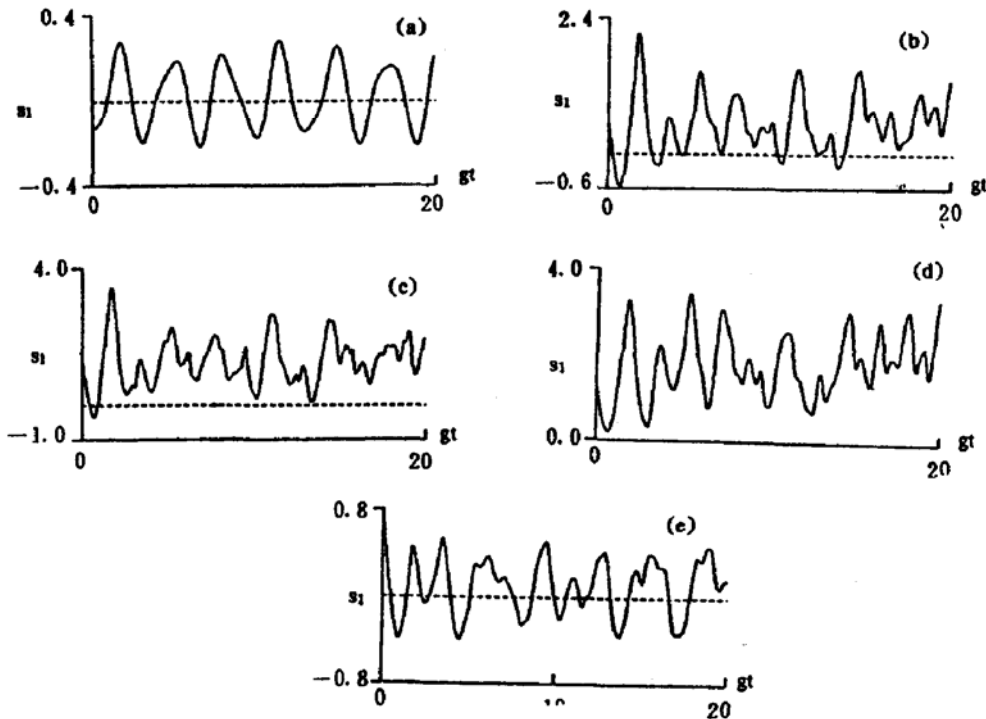


Fig. 1 Time evolution of S_1 . (a) $|q| = 0.2$, $|C| = 0.7$. (b) $|q| = 0.8$, $|C| = 0.7$. (c) $|q| = 0.9$, $|C| = 0.7$. (d) $|q| = 0.8$, $|C| = 0.2$. (e) $|q| = 0.8$, $|C| = 0.9$

图 2 给出了 C 的幅角 θ 和 q 的幅角 ϕ 对光场的 a_1 分量的压缩效应的影响, 虚线对应于 $S_1 = 0$. 可以看出: q 和 C 的幅角对光场的压缩效应的影响是很大的. 特别是当 $\phi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 光场的 a_1 分量不呈现压缩(如图 2(b) 所示). 另外, 在变换 $\phi \rightarrow \phi + \pi$ 下, S_1 保持不变.

4 光子的聚束和反聚束效应

对于单模光场, 二阶相干度 $g^{(2)}(0)$ 可表示为

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^+ a^+ a a \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2} \quad (31)$$

若 $g^{(2)}(0) > 1$, 光子是聚束的, 光场呈现经典态; 若 $g^{(2)}(0) < 1$, 光子是反聚束的, 光场呈现非经典态. (31) 式中的 $\langle a^+ a^+ a a \rangle$ 和 $\langle a^+ a \rangle$ 可用光场密度矩阵元表示为

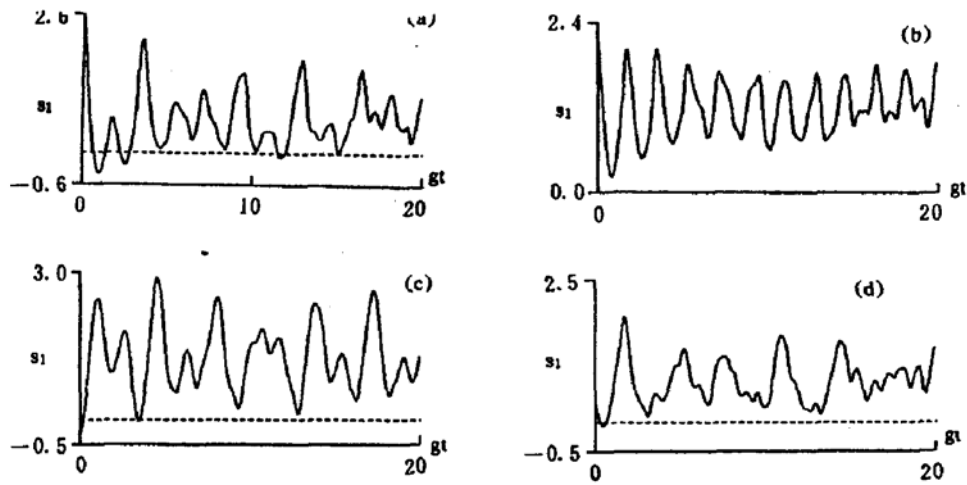


Fig. 2 Time evolution of S_1 . $|q| = 0.8$, $|C| = 0.7$. (a) $\phi = 0$, $\theta = \pi$. (b) $\phi = 0$, $\theta = \pi/2$. (c) $\theta = 0$, $\phi = \pi/2$. (d) $\theta = 0$, $\phi = \pi/6$

$$\langle a^+ a^+ a a \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) \rho_{m,m}(t) \tag{32}$$

$$\langle a^+ a \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} m \rho_{m,m}(t) \tag{33}$$

由(30)~(33)式,通过数值计算得 $g^{(2)}(0)$ 的演化规律如图3所示,其中 q 和 C 的幅角取为零. 在图3(a)中取 $|C| = |q| = 0.2$, 可以证明^[5]: 初始平均光子数 $\bar{n} = \frac{\beta^2 |q|^2}{1 - |q|^2} \approx 0.98$, 方差 $\text{Var}(n) = \frac{\beta^2 |q|^2 (1 - \beta^2 |q|^2)}{(1 - |q|^2)^2} \approx 0.06$, 这意味着单光子态占主要成份, 且具有很窄的分布. 这时, $g^{(2)}(0)$ 呈现较为规则的振荡, 光子始终是反聚束的, 光场始终呈现非经典态. 随着 $|q|$ 的增大, \bar{n} 和 $\text{Var}(n)$ 随之增大, 结果光子的反聚束效应逐渐减弱(见图3(b)和(c)). 当 $|q|$ 不变时, 光子的反聚束效应也随 $|C|$ 的增大而减弱(见图3(b),(d)).

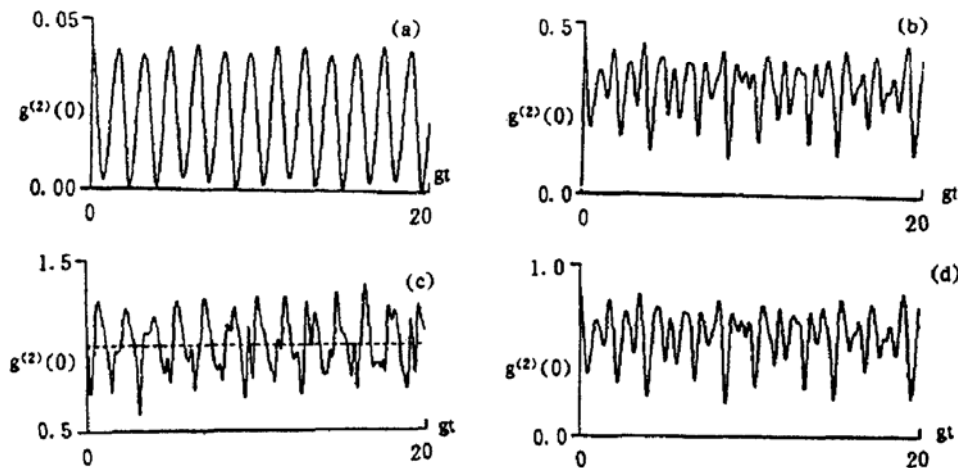


Fig. 3 Time evolution of $g^{(2)}(0)$, $\theta = 0$, $\phi = 0$. (a) $|C| = |q| = 0.2$. (b) $|C| = 0.2$, $|q| = 0.6$. (c) $|C| = 0.2$, $|q| = 0.8$. (d) $|C| = 0.7$, $|q| = 0.6$

5 结 论

本文讨论了双光子 TC 模型中场的压缩效应,光子的聚束和反聚束效应. 结果表明: 1) 当初态为对数态时,在一定的参数范围内,光场可呈现压缩效应; 2) 光子的反聚束效应随 $|C|$ 和 $|q|$ 的增大而减弱.

参 考 文 献

- [1] M. Tavis, F. W. Cummings, Exact solution for an N-molecule-radiation-field Hamiltonian. *Phys. Rev.*, 1968, **170**(2): 379~384
M. Tavis, F. W. Cummings, Approximate solution for an N-molecule-radiation-field Hamiltonian. *Phys. Rev.*, 1969, **188**(2): 692~695
- [2] S. M. Barnett, M. A. Dupertuis, Multiatom squeezed states: a new class of collective atomic states. *J. Opt. Soc. Am.*, 1987, **B4**: 505~511
- [3] 柴晋临, 张智明, 李福利, 双光子 Tavis-Cummings 模型中场的压缩性质. *量子电子学*, 1990, **7**(2): 103~108
- [4] 郭 红, 彭金生, 双光子 T-C 模型中双原子算符的压缩及其崩溃与回复效应. *量子电子学*, 1991, **8**(3): 311~315
- [5] M. H. Mahran, A. S. F. Obada, The dynamics of the Jaynes-Cummings model in the logarithmic state. *J. Mod. Opt.*, 1988, **35**(11): 1847~1855

Nonclassical effects of the field in the logarithmic state Tavis-Cummings model

SONG Tongqiang¹⁾ FENG Jian²⁾ WANG Wenzheng¹⁾

(1) *Institute of Optical Communication, Liaocheng Teachers' College, 252059*
(2) *Department of Physics, Liaocheng Teachers' College, 252059*

(Received 21 December 1992; revised 15 June 1993)

Abstract

In this paper, the general evolution laws of the two-photon Tavis-Cummings model have been investigated. When atoms are in ground state and field is in the logarithmic state initially, the quantum statistical properties of the radiation field, as an example, are discussed.

Key words Tavis-Cummings model, squeezing, bunching and antibunching effect.