

Fibonacci 光栅衍射频谱的自相似结构

华金龙 冯伟国 刘念华

(同济大学玻尔固体物理研究所, 上海 200092)

吴 翔

CCAST 理论物理研究中心(国际实验室), 北京;
中国科学院材料物理国际研究中心, 沈阳;
同济大学玻尔固体物理研究所, 上海 200092

提 要

本文设计并制作了一种按 Fibonacci 数列规则($n=9$)排列的准周期衍射光栅, 从理论和实验两方面计算与显示了该光栅的自相似衍射频谱. 这对准晶体光学中非周期的频率分析研究有一定的理论和实用价值.

关键词: Fibonacci 光栅, 自相似衍射频谱.

1 引 言

1984年 Shechtman^[1]等人在快速淬火的 Al-Mn 合金中, 用透射电子显微镜观察, 发现了 20 面体对称性结构, 得到了许多新的物理信息, 从而引起了物理学家们的极大兴趣. 在“准晶体”这一新概念框架下, 提出了不少模型^[3]. 目前, 存在广泛兴趣的是对由 Fibonacci 系列组成的一维准周期系统的光学性质. 这一系统的许多物理内容, 其中包括强度标值等, 有着丰富的内在结构和广泛应用. 例如, 半导体器件中准周期超晶格的内部表面极化模式, 半无限 Fibonacci HgTe/CdTe 超晶体内层能带与能带内部的等离子区结构, 准周期 Fibonacci 层的发射系数和金属 Fibonacci 超晶体的反射率等方面的课题.

本文提出了一种新的用准周期 Fibonacci 光栅来显示衍射频谱中丰富的自相似结构的理论和实验方法, 并将数值计算与本文的实验结果作了对比, 得到较为满意的结果.

2 n 代 Fibonacci 系列光栅与它的衍射强度

取一准周期衍射光栅, 沿 x 方向取两个基本生成元块, 分别称为 L 和 S , 将两者按 Fibonacci 系列的数字规则作如下放置:

$$G_1 = \{L\}, G_2 = \{LS\}, G_3 = \{LSL\}, \dots, G_n = G_{n-1}G_{n-2} \quad (1)$$

上述情况中的 L 基元块由光栅缝宽为 a 的狭缝和与邻近狭缝的较长遮挡间距组成, 其光栅常数, 即相邻两缝之间的中心距离为 $d_L = d$, 而 S 基元块的缝宽和 L 相同, 但它的光栅常数 d_s 比 d

小些. 在本文的实际工作中, 两基元块光栅常数之比取为黄金分割值的倒数,

$$\frac{d_s}{d_L} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \tau. \quad (2)$$

图 1 是一个含有 13 条缝的第 6 代 Fibonacci 衍射光栅示意图. 缝宽 a 通常应取得比入射光的波长稍小些, 当然这个条件在光学实验中要求是较高的. d 是 L 基元块的光栅常数, 而 τd 是 S 基元块的光栅常数. 由于图 1 是为了显示出各部分组件的尺度, 其比例是不够确切的.

在作者所考虑模型中, 一个第 n 代准周期光栅, 共有 $N \equiv F_n$ 条缝. 这里 F_n 是 Fibonacci 系列中的第 n 项, 定义为

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad \dots, \quad (3)$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

第 n 代光栅在 x 方向的狭缝中心位置的坐标是

$$x_1 = d, \quad x_2 = d(1 + \tau), \quad (4)$$

$$x_3 = d(2 + \tau), \quad x_4 = d(3 + 2\tau)$$

若取

$$j \equiv F_m + l \quad m < n \quad l \leq F_{m-1}, \quad (5)$$

则可得到一简单的递推公式, 从而可确定第 j 条缝的坐标位置

$$x_j \equiv x_{F_m+l} = x_{F_m} + x_l \quad (6)$$

于是, 第 n 代光栅总宽度为

$$D_n = F_{n-1}d_L + F_{n-2}d_s \quad (7)$$

为简便起见, 假设入射光为波长 λ 的单色光, 并垂直入射到光栅表面. 衍射条纹强度 I_x 可由标准的光栅的傅里叶变换法求得^[8],

$$I_x = F(u)S_n(\Delta\phi) \quad (8)$$

式中 $F(u)$ 称相因子, 通常在衍射实验中可取一个单位的衍射强度. 它可表为缝宽 a 的函数:

$$F(u) = \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2, \quad \text{其中 } u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \quad (9)$$

$S_n(\Delta\phi)$ 是结构因子, 它实质上反映了由基元块组成的准周期光栅的空间分布方式, 其表达式为:

$$S_n(\Delta\phi) = I_0 \left| \sum_{j=1}^{F_n} \exp(i\Delta\phi_j) \right|^2 \quad (10)$$

$\Delta\phi_j$ 可被表达为递推公式,

$$\Delta\phi_j \equiv \Delta\phi_{F_m+l} = \Delta\phi_{F_m} + \Delta\phi_l \quad (11)$$

$$m < n, \quad l \leq F_{m-1}$$

其初值为

$$\Delta\phi_1 = \Delta\phi, \quad \Delta\phi_2 = \Delta\phi(1 + \tau), \quad \Delta\phi_3 = \Delta\phi(2 + \tau), \quad \dots, \quad (12)$$

$$\Delta\phi \equiv \Delta\phi_L \equiv 2\pi d \sin \theta / \lambda \quad (13)$$

系数

$$S_n(0) = (F_n)^2 I_0 = N^2 I_0 \quad (14)$$

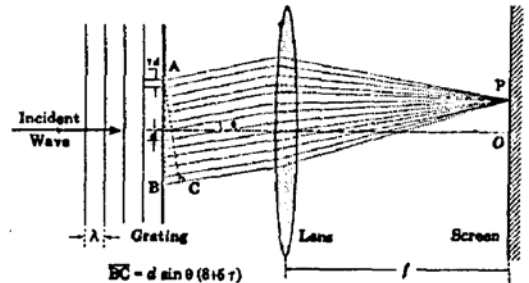


Fig. 1 An idealized 6th quasiperiodic Fibonacci diffraction grating with 13 slits. The slit width a is shown for convenience to be considerably smaller than the incident wave length λ . d is the grating constant for seed L , and τd is for seed S , where $\tau = 0.618$

通常作为归一化常数. 为方便起见, 在下列数值计算中, 已作了归一化处理, 即取 $S(0) = 1$.

3 数值结果

作者采用上节给出的公式, 进行了数值运算.

众所周知, N 条缝的周期光栅, 屏上观察到的衍射花样是由一系列周期性规律的极大值调制的, 每两个相邻主极大之间, 存在 $(N - 2)$ 个较小的次极大, 而对于 Fibonacci 光栅, 衍射谱的极大值呈现出丰富的自相似结构. 图 2 给出了第 9 代 Fibonacci 光栅的自相似的衍射强度分布的结构因子. 可以看到, 任意两个主极大之间的衍射峰都具有相似的结构: 如果将位相轴的标度放大 τ^{-1} 倍, 则衍射峰的位置与放大前完全重合. 这种自相似花样是 Fibonacci 光栅的自相似的几何构造的反映. 对衍射花样进行傅里叶分析, 将提供光栅构造的信息. 类似的方法应用到对准晶体的 X 射线衍射的分析, 可以了解准晶的结构.

图 3 画出了第 6 代 Fibonacci 光栅的结构因子的 5 条曲线, 相应地分别代表着不同的比值 $d_s/d_L \equiv \tau' = 1, 4/5, 7/10, (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.618 = \tau, 1/2$. 当 $\tau' = 1$ 时, 如图 3(a) 所示, 它回到了周期为 $\Delta\phi = 2\pi$ 的普通周期光栅; 当 τ' 表示为有理数时, 衍射结构还存在着周期性, 如图 3(b)、图 3(c) 和图 3(e) 所示; 但当它取为黄金分割的倒数时, 如图 3(d) 所示, 结构的对称性就被完全破坏了, 而呈现出新的自相似结构的状态.

对于第 n 代 Fibonacci 光栅, d_L 与 d_s 出现的数目之比为 F_{n-1}/F_{n-2} , 当 n 趋于无穷时, 这一比值为黄金分割数, 即 τ^{-1} . 由此, 引入平均光栅常数

$$\bar{d} = \tau^{-1}d_L + d_s = (\tau^{-2} + 1)d \quad (16)$$

类似于文献[9]的证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 可以得到衍射峰的位置满足

$$\bar{d} \sin \theta = (m + m' \tau^{-1})\lambda \quad (17)$$

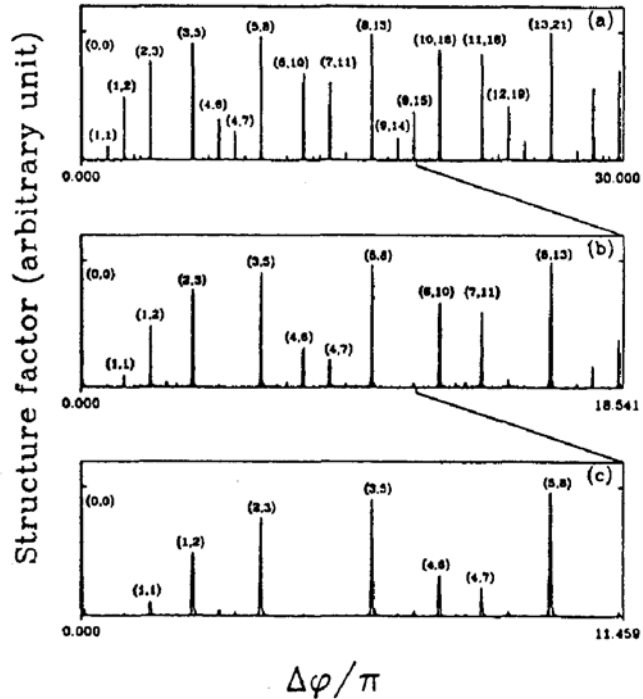


Fig. 2 Self-similar structure factor for the 9th Fibonacci grating with $d_s/d_L = (\sqrt{5} - 1)/2$

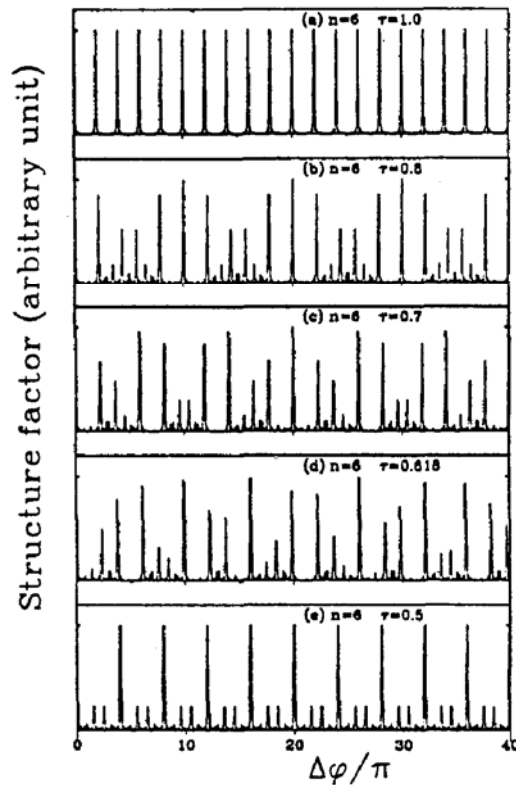


Fig. 3 Structure factors for the 6th Fibonacci grating with different ratios of $\tau = d_s/d_L$

式中 m, m' 为整数. 对于 Fibonacci 准超晶格, 文献[2]给出了类似的公式. 将(17)式用 $\Delta\phi$ 表示, 即有

$$\Delta\phi = \frac{2\pi(m + m' \tau^{-1})}{(1 + \tau^{-2})} \quad (18)$$

当 $m = F_l, m' = F_{l+1}$ 时, 如 $(m, m') = (1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8) \dots$, 这些配对的重要参数描述了衍射峰的主极大的位置, 如图 2 所示. 这些结果与准晶体上的 X 射线衍射频谱的结构类似.

4 实验结果

作者采用了由上海半导体器件研究所制作的第 9 代 Fibonacci 系列光栅, 先制版再缩小拍摄在涂铬的玻璃片上, 玻璃片尺寸为 6 cm 边长的正方形. 为了确保光栅刻制尺寸的正确性, 在玻璃片上开了 9 个相同的窗口, 如图 4 所示每个窗口的宽度为 2.5 mm, 其中共刻有 55 条缝条, 缝条间距按第 9 代 Fibonacci 系列排布, 窗口的长度为 1.8 mm, 长度方向缝条接头处拼接符合精度要求. 图 5 是在光学实验暗室中用激光光源摄制的衍射频谱照片, 分别采用了 2 sec 和 4.5 sec 的拍摄速度, 中央主极大和其两侧的第 n 级次极大位置清晰, 其可和图 2 中的频谱强度标值对照, 值得说明的是 $(8, 13)$ 与 $(13, 21)$ 两主极大之间的次极大及以后的衍射峰被单缝衍射因子调制而抹平. 由此可见, 实验呈现的光强分布和理论计算是完全符合的.



Fig. 4 The Fibonacci grating



Fig. 5 Two photos in spectra (exposure in (a) 2 sec; (b) 4.5 sec)

结论 本文给出了一种新的光学傅里叶变换方法——准周期光学傅里叶变换法. 理论和实验结果揭示出在准周期光栅衍射下, 频谱具有非常丰富的自相似结构. 由于其结果与微观体系 (如 X 射线在准晶体上的衍射) 的物理现象有数学上同构的性质, 因而是一种探索和研究准一维体系光学性质的甚为有效的理论和实验方法.

参 考 文 献

- [1] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias *et al.*, Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 1984, **53**(20): 1951~1953
- [2] R. Merlin, K. Bajema, R. Clarke *et al.*, Quasiperiodic GaAs-AlAs heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **55**(22): 1768~1770
- [3] P. J. Steinhardt, S. Ostlund, *The Physics of Quasicrystals*, 1987, Singapor, World Scientific, Chap. 3, 175~182
- [4] Weiguo Feng, Wenzhong He, Dengping Xue *et al.*, Reflection of soft X-rays and extreme ultraviolet from a metallic Fibonacci quasi-superlattice, *J. Phys. :Condensed Matter*, 1989, **1**(43): 8241~8249
- [5] P. W. Stephens, A. I. Goldman, Sharp diffraction maxima from a icosahedral glass. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **56**(11): 1168~1171
- [6] 钟锡华, 自相似结构的谱函数. *物理学报*, 1990, **39**(6): 901~908
- [7] 姜晓明, 吴自勤, 一维 Fibonacci 系列的 X 射线衍射峰轮廓的计算. *物理学报*, 1988, **37**(11): 1900~1909
- [8] D. Sherwood 著, 范世藩译, 晶体, X 射线与蛋白质, 1985, 北京科学出版社, 第七章, 一维障碍物的衍射, 225~258
- [9] R. K. P. Zia, W. J. Dallas, A simple derivation of quasi-crystalline spectra. *J. Phys. (A)*, 1985, **18**(7): L341~345

The selfsimilar diffraction spectra of a Fibonacci grating

HUA Jinlong FENG Weiguo LIU Nianhua

(Pohl Institute of Solid Physics, Tongji University, Shanghai 200092)

WU Xiang

(Center of theoretical Physics CCAST (World Laboratory), Beijing
International Centre for Materials Physics, Academia Sinica, Shenyang
Pohl Institute of Solid State Physics, Tongji University, Shanghai 200092)

(Received 13 July 1992; revised 22 February 1993)

Abstract

A Fibonacci sequence diffraction grating with the generation number of nine is designed and prepared. The selfsimilar diffraction spectra of the grating is obtained both theoretically and experimentally, which stimulates interest in the study of the optical scaling properties of the quasi-crystal.

Key words Fibonacci grating, selfsimilar diffraction spectra.